

# UNIVERSITATEA TITU MAIORESCU

*Facultatea de Știința și Tehnologia Informației*

Conf. univ. dr.

**VALENTIN GÂRBAN**

Lect. univ. dr.

**SIBICEANU MARIANA**

Asist. univ.drd.

**ZANFIR VERONICA**

## ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE

Curs pentru învățământul la distanță



BUCUREȘTI – 2008

## ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE

Algebra este una din disciplinele de pregătire fundamentală care, pentru profilul INFORMATICĂ, este impusă de către Agenția Națională pentru Asigurarea Calității în Învățământul Superior (ARACIS) ca esențială pentru pregătirea studenților și pentru depășirea procedurilor de evaluare și acreditare. Modul de prezentare a acestui material are în vedere particularitățile învățământului la distanță, la care studiul individual este determinant. Pentru orice nelămuriri față de acest material vă rugăm să contactați tutorele de disciplină care are datoria să vă ajute oferindu-vă toate explicațiile necesare.

Disciplina de Algebră (semestrul I) își propune următoarele obiective specifice:

- Formarea la studenți a capacităților de a raționa modern matematic;
- Identificarea corectă a tuturor dimensiunilor unei probleme matematice precum și a procedurilor ce pot fi utilizate pentru rezolvarea acestora;
- O comparație critică a metodelor de rezolvare evidențiind, eventual, calea optimă de soluționare;
- Stabilirea de conexiuni cu celelalte discipline de factură matematică atât în faza de formulare- reformulare a problemei cât și în ceea ce privește modalitățile de rezolvare.

Vă precizăm de asemenea că, din punct de vedere al verificărilor și al notării, cu adevărat importantă este capacitatea pe care trebuie să o dobândiți și să o probați de a rezolva toată tipologia de probleme aplicative aferente materialului teoretic prezentat în continuare. De aceea vă recomandăm să parcurgeți cu atenție toate problemele rezolvate, să rezolvați problemele propuse și de asemenea să nu ocoliți testele de autoevaluare; fiți convinși că examenul final apelează la tipurile de probleme prezente în secțiunile menționate anterior.

SUCCES!

Coordonator disciplină: Conf. univ. dr. Valentin GÂRBAN  
Tutore: Asist. univ. drd. Veronica ZANFIR

# **MODULUL I**

## **SISTEME DE ECUAȚII LINIARE**

În acest modul veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Sisteme algebrice liniare neomogene;
- Sisteme algebrice liniare omogene;
- Compatibilitatea sistemelor algebrice liniare;
- Proceduri de rezolvare a sistemelor algebrice liniare;
- Cazurile de nedeterminare și modul de obținere a soluției optime;
- Utilizarea calculatoarelor numerice pentru soluționarea sistemelor algebrice liniare;
- Cunoașterea și utilizarea programelor de calcul dedicate soluționării sistemelor de ecuații liniare.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în continuare, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu trebuie să fie cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Vă recomandăm să vă constituiți un caiet de probleme și, pentru fiecare tip de exercițiu, să vă fixați algoritmul de rezolvare pe etape. Rezolvați cât mai complet problemele propuse și cele conținute în testul de autoevaluare.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 6 ore.

# LECTIA I.1

# DEFINIREA SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE. METODE FUNDAMENTALE DE REZOLVARE

În această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definirea sistemelor algebrice liniare;
- Forme echivalente de scriere a sistemelor algebrice liniare;
- Conexiuni între diversele reprezentări ale sistemelor algebrice liniare;
- Proceduri fundamentale de rezolvare a sistemelor algebrice liniare;
- Algoritmizarea procedurilor de soluționare a sistemelor algebrice liniare;

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 3 ore.

### LI.1.1. MODURI DE SCRIERE A SISTEMELOR. DEFINITII

*Forma desfășurată* de scriere a unui sistem de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute este următoarea:

[illegible]

în care  $a_{ij}, b_i$  cu  $i=1,2,\dots,m$  și  $j=1,2,\dots,n$  sunt elemente dintr-un corp comutativ  $K$ .

Corpul  $K$  poate fi, de exemplu, corpul  $R$  al numerelor reale, corpul  $Q$  al numerelor raționale, corpul  $C$  al numerelor complexe, corpul  $Z_n$  al claselor de

resturi în raport cu numărul prim  $p$  etc. Elementele  $a_{ij}$  se numesc *coeficienții necunoscutelor*, iar  $b_i$  se numesc *termenii liberi*. Anume,  $a_{ij}$  este coeficientul lui  $x_j$  din ecuația  $i$ , iar  $b_i$  este termenul liber al ecuației  $i$ .

Forma concentrată de scriere este:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Sistemul se poate scrie și sub forma matriceală:  $A \cdot X = B$  în care:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Elementele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se numesc *necunoscutele sistemului*, care urmează a se găsi în corpul  $K$ , pe când  $a_{ij}$  și  $b_i$ , aflate tot în  $K$ , se consideră cunoscute.

Numim *soluție a sistemului* un șir ordonat de elemente din  $K$ :  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  care puse în locul necunoscutelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , fac ca toate ecuațiile sistemului să fie satisfăcute. Rezultă următoarea clasificare a sistemelor:

- Un sistem se numește *compatibil* dacă are cel puțin o soluție. În acest caz el se zice *compatibil și determinat* dacă are o singură soluție și *compatibil și nedeterminat* dacă are cel puțin două soluții.
- Sistemul se numește *incompatibil* dacă nu are nici-o soluție. De exemplu următorul sistem este incompatibil:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

*Rezolvarea unui sistem* înseamnă a stabili dacă este compatibil sau incompatibil, iar în caz de compatibilitate rezolvarea sistemului presupune *găsirea tuturor soluțiilor sale*.

Printre metodele de rezolvare menționăm „metoda lui Cramer”, explicată în manualul de algebră de clasa a-XI-a. Această metodă se aplică în cazul particular când sunt îndeplinite următoarele condiții: în scrierea matriceală a sistemului,  $A \cdot X = B$ , matricea  $A$  este pătratică (deci numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute) și determinantul matricei  $A$  este nenul. În acest caz, după cum se știe, sistemul este compatibil și determinat.

## LI.1.2. METODA ELIMINĂRII SUCCESIVE PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE

Să considerăm mai întâi următorul sistem:

$$(*) \quad \begin{cases} a_1 x_1 = b_1 \\ a_2 x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_n x_n = b_n \end{cases} ; \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \neq 0,$$

care este, bineînțeles, compatibil și determinat, având soluția:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1}, x_2 = \frac{b_2}{a_2}, \dots, x_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

Pe de altă parte să remarcăm că asupra unui sistem se pot efectua o serie de transformări care nu-i schimbă mulțimea de soluții. Astfel de transformări sunt numite *transformări echivalente*. Menționăm trei tipuri de transformări echivalente care vor fi folosite în cele ce urmează:

- I. Schimbarea ordinii ecuațiilor.
- II. Înmulțirea unei ecuații cu un factor nenul.
- III. Înmulțirea unei ecuații cu un factor oarecare (nul sau nenul) spre a se aduna la o altă ecuație.

Este evident că transformările enumerate mai sus nu schimbă mulțimea de soluții, adică sunt transformări echivalente. Importanța lor este relevată în următoarea:

### *Teoremă*

Printr-un șir de transformări de tipul I, II, III, orice sistem liniar poate fi adus la o formă asemănătoare cu sistemul (\*).

### *Demonstrație*

Admitem pentru început ipoteza că  $a_{11}$ , coeficientul lui  $x_1$  din prima ecuație, este nenul. Pentru rolul pe care-l va avea acest element, îl numim *pivot*.

Aplicăm sistemului transformări de tipul I, II sau III prin care vom face ca  $x_1$ , care apare în prima ecuație, deoarece coeficientul său,  $a_{11}$ , este nenul, să nu mai apară în celelalte ecuații. De exemplu, pentru a face ca  $x_1$  să nu mai apară în a doua ecuație, se înmulțește ecuația a doua cu  $a_{11}$ , (transformare de tipul II deoarece  $a_{11}$  este nenul), apoi se înmulțește prima ecuație cu  $(-a_{21})$  spre a o aduna la a doua (transformare de tipul II).

În general, pentru a face să dispară  $x_1$  din ecuația  $i$ , se înmulțește ecuația  $i$  cu  $a_{11}$  apoi se înmulțește prima ecuație cu  $a_{i1}$  spre a o aduna la ecuația  $i$ . Transformând astfel toate ecuațiile sistemului, el va căpăta forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1j}^{(1)}x_j + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)}x_j + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{ij}^{(1)}x_j + \dots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)} \\ \dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mj}^{(1)}x_j + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

S-au marcat cu indicele superior (1) noii coeficienți și termeni liberi ai ecuațiilor. Deși prima ecuație a rămas neschimbată, pentru uniformitate, au fost marcați la fel și coeficienții și termenul liber ai acestei ecuații. Spunem că am realizat prima *iterație* asupra sistemului. În principiu în această nouă formă sistemul se reduce la cel format din ultimele  $m - 1$  ecuații: dacă se rezolvă acesta din urmă atunci prima ecuație servește la determinarea lui  $x_1$ .

Se poate stabili nu numai formula, dar și o *regulă* simplă de calculare a coeficienților și termenilor liberi pentru noua formă a sistemului, în afară de cei din prima ecuație, care așa cum am menționat, rămân neschimbați.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad | \cdot (-a_{i1}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad | \cdot a_{11} \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. +$$

Deoarece ecuația  $i$  se înmulțește cu  $a_{11}$  urmând apoi să se adune acesteia prima ecuație înmulțită cu  $(-a_{i1})$  rezultă că noul coeficient al lui  $x_j$  în ecuația  $i$  se poate calcula cu formula:  $a_{ij}^{(1)} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j}$ . Se observă următoarea regulă de calculare a lui  $a_{ij}^{(1)}$ : ducând o săgeată care unește pivotul  $a_{11}$  cu elementul  $a_{ij}$  care urmează a fi transformat, această săgeată este diagonala dreptunghiului marcat în figură; potrivit formulei, cu ajutorul acestui dreptunghi, se poate calcula  $a_{ij}^{(1)}$  ca *diferența dintre produsul elementelor de pe diagonala care conține pivotul și produsul elementelor de pe cealaltă diagonală*. Din cauza acestei reguli geometrice, această metodă de rezolvare a sistemelor se mai numește și *metoda dreptunghiului*.

Așa cum am făcut ca  $x_1$  să rămână numai în prima ecuație, putem face ca  $x_2$  să apară numai în a doua ecuație cu condiția ca  $a_{22}^{(1)}$ , noul coeficient al lui  $x_2$  din ecuația a doua, să fie nenul. Și așa mai departe.

Să revenim asupra ipotezei asumate mai sus, anume că  $a_{11}$  este nenul. Dacă  $a_{11}$  este nul înseamnă că  $x_1$  nu apare în prima ecuație. Dacă apare într-o altă ecuație, de exemplu în a doua, atunci schimbând între ele prima și a doua ecuație (deci o transformare de tipul I) se ajunge că în noua formă a sistemului este îndeplinită condiția că  $a_{11}$  este nenul.

Dacă după a doua iterație coeficientul  $a_{22}^{(1)}$  este nul atunci căutăm o ecuație (în afară de prima) în care coeficientul lui  $x_2$  este nenul și o schimbăm cu a doua (sau reordonăm oricum ecuațiile astfel ca să aducem acea ecuație pe locul doi) și continuăm *procesul de iterație*.

Se poate întâmpla ca  $x_2$  să nu apară în nici o ecuație în afară de prima, așa încât pe a doua coloană *nu poate fi ales nici un pivot*. În această situație schimbăm ordinea necunoscutelor trecând necunoscuta  $x_2$  pe ultimul loc și se continuă procesul de iterație cu noua formă a sistemului.

Să mai remarcăm că în formele succesive pe care le capătă sistemul putem să nu mai menționăm necunoscutele. În fond se modifică numai coeficienții necunoscutelor și termenii liberi, adică *matricea extinsă*,  $(A|B)$ , a sistemului, care suferă transformări (numite iterații) succesive. Din cele spuse mai sus rezultă următoarele reguli de calculare a unei iterații:

- Se stabilește pivotul.
- Elementele de pe linia pivotului se transcriu neschimbate.
- Elementele de pe coloana pivotului (în afară de pivot) se înlocuiesc cu 0.
- Toate celelalte elemente (care nu sunt nici pe aceeași linie nici pe aceeași coloană cu pivotul) se transformă după regula dreptunghiului.

Schema derulării iterațiilor asupra matricei extinse este următoarea:

$$(A|B) \rightarrow (A^{(1)}|B^{(1)}) \rightarrow (A^{(2)}|B^{(2)}) \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow (A^{(r)}|B^{(r)}) = \left( \begin{array}{cccc|ccc|c} a_{11}^{(r)} & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1}^{(r)} & \dots & a_{1,n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & a_{22}^{(r)} & \dots & 0 & a_{2,r+1}^{(r)} & \dots & a_{2,n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r,r}^{(r)} & a_{r,r+1}^{(r)} & \dots & a_{r,n}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{r+1,r+1}^{(r)} & \dots & a_{r+1,n}^{(r)} & b_{r+1}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m,r+1}^{(r)} & \dots & a_{m,n}^{(r)} & b_m^{(r)} \end{array} \right)$$

Într-adevăr, dacă, de exemplu,  $a_{r+1,r+1}^{(r)}$  ar fi nenul, atunci alegându-l pe acesta drept pivot s-ar putea continua procesul de iterație. Dacă pe prima coloană a *acestui bloc* ar fi un element nenul, făcând o schimbare de linii s-ar ajunge în situația că  $a_{r+1,r+1}^{(r)}$  este nenul. Dacă prima coloană a blocului este nulă, dar un element de pe a doua coloană a blocului este nenul, atunci schimbăm ordinea necunoscutelor aducând necunoscuta  $r + 2$  pe locul  $r + 1$  și atunci prima coloană a blocului ar deveni nenulă.

Se poate scrie forma pe care a căpătat-o sistemul după cele  $r$  iterații:

[illegible]

Observăm că: dacă cel puțin unul dintre elementele:  $b_{r+1}^{(r)}, b_{r+2}^{(r)}, \dots, b_m^{(r)}$  este nenul atunci sistemul este incompatibil. *Așadar, dacă cel puțin unul dintre termenii liberi de pe liniile pe care nu s-a ales pivot este nenul, atunci sistemul este incompatibil.*

În caz contrar, adică dacă  $b_{r+1}^{(r)} = 0, b_{r+2}^{(r)} = 0, \dots, b_m^{(r)} = 0$ , vom arăta că sistemul este compatibil și-i vom determina toate soluțiile.

În primul rând să constatăm că în acest caz din sistem putem păstra numai primele  $r$  ecuații.

Mai departe să împărțim cele  $n$  necunoscute în două clase: primele  $r$ , care corespund coloanelor pe care s-au ales pivoți, le numim *necunoscute principale*, iar celelalte le numim *necunoscute secundare*. Atribuim necunoscutelor secundare valori arbitrarii:  $x_{r+1} = \lambda_1, x_{r+2} = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_{n-r}$  pe care le înlocuim în sistem.

Păstrând în membrul stâng numai necunoscutele principale, sistemul devine:

[illegible]

Deoarece coeficienții necunoscutelor sunt nenuli (ei se obțin prin produse ale pivoților) rezultă că sistemul a căpătat forma (\*), așa cum s-a menționat în enunțul teoremei. Putem scrie *soluția generală* a sistemului:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \dots + c_{1,n-r}\lambda_{n-r} + c_1 \\ x_2 & = & c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \dots + c_{2,n-r}\lambda_{n-r} + c_2 \\ \dots & & \dots \\ x_r & = & c_{r1}\lambda_1 + c_{r2}\lambda_2 + \dots + c_{r,n-r}\lambda_{n-r} + c_r \\ x_{r+1} & = & \lambda_1 \\ x_{r+2} & = & \lambda_2 \\ \dots & & \dots \\ x_n & = & \lambda_{n-r} \end{array} \right.$$

unde am notat:

$$c_{11} = -\frac{a_{1,r+1}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}}, c_{12} = -\frac{a_{2,r+1}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}}, \dots, c_{1,n-r} = -\frac{a_{1,n-r}^{(r)}}{a_{11}^{(r)}}, c_1 = \frac{b_1^{(r)}}{a_{11}^{(r)}} \text{ etc.}$$

Denumirea de „soluție generală” semnifică faptul că orice soluție a sistemului are forma de mai sus, adică se obține prin fixarea valorilor  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$  ale necunoscutelor secundare. Într-adevăr, sistemul scris sub forma (\*\*) are o singură soluție.

Soluția generală a sistemului se poate scrie și sub forma matriceală:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{n-r} X_{n-r} + X_0$$

unde am notat:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_r \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că în timp ce  $X_0$  este soluție a sistemului (ea se obține dând tuturor necunoscutelor secundare valoarea zero) celelalte matrice coloană:  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  nu sunt soluții decât în cazul când matricea  $X_0$  este nulă.

În încheiere să observăm că dacă numărul  $r$  al necunoscutelor principale (care este egal cu numărul pivoților sau cu numărul iterațiilor) este egal cu  $n$ , numărul total al necunoscutelor, atunci nu mai sunt necunoscute secundare și deci sistemul este determinat. Numărul necunoscutelor secundare,  $n - r$ , se numește *gradul de nedeterminare al sistemului*.

### LI.1.3 EXAMPLE

A) Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

*Rezolvare:*

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 13 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -14 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{64} & 28 \\ 0 & 0 & 64 & 28 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 384 & 0 & 0 & 264 \\ 0 & 192 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 64 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cele trei iterații s-au calculat după regula de calculare a iterațiilor:

- Linia pivotului se transcrie.
- Elementele de pe coloana pivotului (în afară de pivot) se înlocuiesc cu 0.

- Celelalte elemente se transformă după regula dreptunghiului.

După trei iterații procesul de iterare s-a încheiat, el nu mai poate fi continuat.

Deoarece pe unica linie pe care nu s-a ales pivot termenul liber este nul rezultă că sistemul este compatibil.

Numărul de necunoscute principale este egal cu numărul pivoților, adică trei, care este egal cu numărul tuturor necunoscutelor. Deci toate necunoscutele sunt principale, adică sistemul este determinat.

După a treia iterație sistemul a ajuns la următoarea formă:

$$\begin{cases} 384x = 264 \\ 192y = 180 \\ 64z = 28 \end{cases} \text{ care are soluția: } \begin{cases} x = \frac{11}{16} \\ y = \frac{15}{16} \\ z = \frac{7}{16} \end{cases}$$

B) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 0 \\ 2x - 4y + z - 3t = 1 \\ x + y - z + 4t = 3 \\ 4x - 5y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$$

*Rezolvare:*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & | & 3 \\ 4 & -5 & 3 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & | & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & -4 & 3 & | & 3 \\ 0 & 3 & -9 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 9 & | & 6 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{-15} & -15 & | & 3 \\ 0 & 0 & -15 & -15 & | & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -45 & 0 & 0 & -120 & | & -93 \\ 0 & -45 & 0 & -105 & | & -33 \\ 0 & 0 & -15 & -15 & | & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 90 \end{pmatrix}.$$

După trei iterații procesul de iterare s-a încheiat. Deoarece pe singura linie pe care nu s-a ales pivot termenul liber este nenul rezultă că sistemul este incompatibil.

De remarcat faptul că după prima iterație elementul de pe linia a doua și coloana a doua a devenit nul deci nu s-a putut considera drept pivot. Tot pe coloana a doua dar linia a treia se află numărul 3 care, fiind nenul, se poate lua drept pivot. Linia a treia s-a copiat neschimbată pe locul doi iar transformata liniei a doua a trecut pe locul doi astfel încât pivoții să apară pe diagonală.

C) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$$

*Rezolvare:*

$$\begin{aligned} (A|B) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & -14 & 10 & 20 & 0 & -10 \\ 0 & -14 & 10 & 20 & 0 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -28 & 0 & -16 & 24 & -14 & -12 \\ 0 & -14 & 10 & 20 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

După două iterații procesul de iterare s-a încheiat. Sistemul este compatibil deoarece pe singura linie pe care nu s-a ales pivot termenul liber este nul. Sunt două necunoscute principale:  $x_1$  și  $x_2$  corespunzătoare primelor coloane pe care s-au ales pivoți. Celelalte trei necunoscute sunt secundare și lor le atribuim valori arbitrarii:

$$x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta, \quad x_5 = \gamma$$

Obținem astfel soluția generală a sistemului:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{7}\alpha + \frac{6}{7}\beta - \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{5}{7}\alpha + \frac{10}{7}\beta + \frac{5}{7} \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

Notând:  $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{10}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  soluția se

poate scrie sub forma matriceală:  $X = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + X_0$  unde am notat cu  $X$  matricea coloană a necunoscutelor.

### LI.1.4. Exemple propuse

**EI.1.1.** Să se rezolve sistemul algebric liniar

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,5x_1 - 3,2x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 + 0,3x_6 = 0,82 \\ -3,6x_1 + 2,5x_2 - 1,8x_3 - 0,6x_4 + 2x_6 = 0,59 \\ 3x_1 - 5x_2 + 0,7x_3 - 1,4x_4 - 4,2x_5 = -3,92 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1,8x_4 + 11x_5 = 1,91 \\ -3,2x_1 + 0,5x_2 + 2,5x_3 + 1,1x_4 + 3,8x_5 + 4,6x_6 = 1,89 \\ -5x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 3x_5 - 4x_6 = -0,24 \end{array} \right.$$

**EI.1.2.** Pentru sistemul algebric anterior aplicați metoda Gauss.

**EI.1.3.** Fie sistemul algebric liniar  $Ax = b$  unde  $A$  și  $b$  sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Să se calculeze  $\det(A)$
- În ce condiții matricea  $A$  este nesingulară
- Pentru  $A$  nesingulară să se determine inversa sa
- În situația de la c) determinați soluția sistemului algebric liniar.

## LECȚIA 1.2

### SISTEME DE ECUAȚII LINIARE OMOGENE

În această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definirea sistemelor algebrice liniare omogene;
- Forme echivalente de scriere a sistemelor algebrice liniare omogene;
- Calculul rangului unei matrice;
- Existența soluției nule;
- Teoreme fundamentale pentru discuția compatibilității sistemelor algebrice liniare;

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 3 ore.

#### LI.2.1. SISTEME OMOGENE

##### Clasificarea sistemelor omogene

Un sistem se numește *omogen* dacă toți termenii săi liberi sunt nuli. Este ușor de văzut că dacă termenii liberi sunt nuli atunci ei rămân nuli și în decursul iterațiilor. Ca urmare atunci când rezolvăm un sistem omogen nu este nevoie să mai menționăm coloana termenilor liberi, de vreme ce ea rămâne neschimbată.

Atribuind tuturor necunoscutelor valoarea zero obținem, evident, o soluție a sistemului numită *soluția banală*. Prin urmare un sistem omogen nu poate fi incompatibil, de vreme ce are cel puțin o soluție. Deosebim însă două cazuri: sistemul poate fi determinat sau nedeterminat. Mai precis, un sistem omogen este:

- *determinat*, dacă admite numai soluția banală.
- *nedeterminat*, dacă admite cel puțin o soluție nebanală.

##### Sistem fundamental de soluții

Să mai observăm că în scrierea matriceală a soluției generale a unui sistem omogen coloana  $X_0$ , care este întotdeauna o soluție a sistemului, în cazul sistemului omogen aceasta este tocmai soluția banală. Ca urmare forma matriceală a soluției generale a unui sistem omogen este următoarea:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{n-r} X_{n-r}$$

Se vede că în cazul sistemului omogen nu numai  $X_0$ , dar și celelalte coloane:  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  sunt soluții ale sistemului. De exemplu,  $X_1$  se obține pentru:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{n-r} = 0$ . Spunem că soluția generală  $X$  (în cazul sistemelor omogene) este o *combinație liniară* a soluțiilor  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ .

Soluțiile  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  ale unui sistem omogen au următoarele proprietăți care definesc noțiunea de *sistem fundamental de soluții*:

- Numărul lor este egal cu gradul de nedeterminare al sistemului.
- Soluția generală a sistemului este o combinație liniară a soluțiilor  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ .

### Sistemul omogen atașat unui sistem oarecare

Dat fiind sistemul liniar scris sub forma matriceală  $AX = B$  lui îi atașăm sistemul omogen, având aceeași matrice a coeficienților, iar coloana  $B$  a termenilor liberi o înlocuim cu coloana nulă:  $AX = 0$ .

Între soluțiile generale ale celor două sisteme liniare există următoarea legătură: Dacă  $X_0$  este o soluție (particulară) a sistemului neomogen atunci soluția generală a sistemului neomogen se obține adunând soluția sa particulară  $X_0$  cu soluția generală a sistemului omogen.

Într-adevăr, dacă  $X'$  este o soluție oarecare a sistemului omogen, adică  $AX' = 0$ , atunci  $X = X' + X_0$  este o soluție a sistemului neomogen, deoarece :

$$AX = A(X' + X_0) = AX' + AX_0 = 0 + B = B.$$

Reciproc, dacă  $X$  este o soluție a sistemului neomogen, adică  $AX = B$ , atunci notând  $X' = X - X_0$ , avem pe de o parte  $X = X' + X_0$  iar pe de altă parte  $X'$  este soluție a sistemului omogen:

$$AX' = A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0.$$

## LI.2.2. RANGUL MATRICELOR. CALCULUL RANGULUI

### Definiții, notații

Notăm  $M(m, n; K)$  mulțimea matricelor de tip  $(m, n)$  formate cu elemente din corpul comutativ  $K$ . O matrice de tip  $(m, n)$  înseamnă o matrice care are  $m$  linii și  $n$  coloane. Dacă  $m = n$ , atunci spunem că matricea este pătratică de ordinul  $n$ . Notăm  $M(n; K)$  mulțimea matricelor pătratice de ordinul  $n$ . O matrice de tip  $(m, n)$  se poate scrie sub forma desfășurată:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sau sub *forma concentrată*:  $A = (a_{ij})$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , în care am specificat *elementul generic* al matricei  $A$ , adică elementul situat pe linia  $i$  și coloana  $j$ . De exemplu, matricea unitate de ordinul  $n$  se scrie sub forma concentrată astfel:  $I_n = (\delta_{ij})$  în care  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$  este cunoscut sub numele

de *simbolul lui Kronecker*.

Dacă matricea  $A$  este o matrice pătratică atunci ei i se asociază un element din corpul  $K$  numit *determinantul matricei*  $A$ , notat  $\det(A)$  sau  $|A|$ , care se calculează după regulile explicate în manualul de Algebră de clasa a XI-a. Pe de altă parte dintr-o matrice de tip oarecare  $(m, n)$  se pot extrage matrice pătratice de ordin  $r$  care ordin nu depășește nici numărul liniilor și nici numărul coloanelor.

#### Definiție

Se numește *minor de ordinul  $r$  al matricei  $A$*  determinantul unei matrice pătratice de ordinul  $r$  obținute prin intersectarea a  $r$  linii cu  $r$  coloane din matricea  $A$ . Așa cum am spus, numărul  $r$  nu poate să depășească nici numărul  $m$  al liniilor nici numărul  $n$  al coloanelor matricei  $A$ :  $r \leq \min(m, n)$ . Evident, minorii de ordinul  $1$  sunt elementele matricei  $A$ . Numărul tuturor minorilor de ordinul  $r$  este  $C_m^r \cdot C_n^r$ .

#### Definiție

Se numește *rangul matricei  $A$*  și se notează  $\text{rang}(A)$ , numărul natural  $r$  care îndeplinește următoarele două condiții:

1. Există un minor de ordinul  $r$  nenul.
2. Toți minorii de ordinul  $r + 1$  sunt nuli.

Evident că matricea nulă nu are rang în sensul definiției. Prin convenție atribuim acestei matrice rangul zero.

Deoarece numărul minorilor unei matrice este, așa cum s-a menționat, foarte mare, pentru calculul rangului unei matrice vom elabora un algoritm care nu folosește în mod nemijlocit definiția. Există totuși unele clase de matrice pentru care rangul se poate stabili fără dificultate.

#### Exemplu

Matricea

$$E_{m,n;r} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} r \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{matrix} \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-r}$

are rangul egal cu  $r$ .

Într-adevăr, sunt îndeplinite cele două condiții din definiția rangului:

- Există un minor de ordinul  $r$  nenul, anume cel format cu primele  $r$  linii și  $r$  coloane.
- Orice minor de ordinul  $r + 1$  conține cel puțin o linie în afară de primele  $r$ , care este nulă. Minorul respectiv este deci nul.

—

### Algoritmul de calculare a rangului

La fel ca și în cazul sistemelor vom considera o serie de transformări ce se pot efectua asupra unei matrice fără a-i schimba rangul. Anume:

- I. Schimbarea ordinii liniilor sau coloanelor.
- II. Înmulțirea unei linii sau a unei coloane cu un factor nenul.
- III. Înmulțirea unei linii cu un factor oarecare (nul sau nenul) spre a o aduna la o altă linie. Analog pentru coloane.

Faptul că aceste transformări nu schimbă rangul unei matrice rezultă din definiția rangului și din proprietățile determinanților.

#### Propoziție

Printr-un șir de transformări de tipul I, II, III orice matrice nenulă de tip  $(m,n)$  se poate aduce la forma  $E_{m,n;r}$ .

#### Demonstrație

Fie  $A$  o matrice nenulă de tip  $(m,n)$  și presupunem că  $a_{11} \neq 0$ . Această ipoteză nu este restrictivă deoarece dacă  $a_{11} = 0$  prin schimbări de linii și coloane (transformări de tipul I) se poate aduce în locul lui  $a_{11}$  un element nenul.

Mai departe, pentru a face ca pe locul lui  $a_{21}$  să apară zero, se fac următoarele transformări:

- Se înmulțește linia a doua cu  $a_{11}$  (transformare de tipul II deoarece  $a_{11} \neq 0$ ).
- Se înmulțește prima linie cu  $(-a_{21})$  spre a o aduna la a doua – (transformare de tipul III).

În mod analog se poate proceda și cu celelalte elemente de pe prima coloană, astfel încât matricea capătă forma următoare:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Prima linie este identică cu prima linie din matricea  $A$ . Transformările avute în vedere sunt aceleași ca acelea folosite pentru rezolvarea sistemelor astfel că *elementele care nu se află nici pe aceeași linie nici pe aceeași coloană cu pivotul  $a_{11}$  se transformă după aceeași regulă a dreptunghiului.*

Dar pe lângă transformările folosite la rezolvarea sistemelor se pot face transformări și asupra coloanelor. De exemplu, prima coloană se poate înmulți cu  $\frac{1}{a_{11}^{(1)}}$ , deci o transformare de tipul I. Efectul acestei transformări este că pivotul se înlocuiește cu 1, iar toate celelalte elemente ale matricei rămân neschimbate. Mai departe se înmulțește prima coloană cu  $(-a_{12}^{(1)})$  și se adună la a doua coloană (transformare de tipul III). Efectul este înlocuirea lui  $a_{12}^{(1)}$  cu 0, toate celelalte elemente ale matricei rămânând neschimbate. La fel se poate proceda și cu celelalte elemente de pe linia pivotului (în afară de pivot).

În concluzie putem formula următoarele reguli de calculare a iterațiilor specifice pentru determinarea rangului:

- Pivotul se înlocuiește cu 1.
- Elementele de pe linia pivotului precum și cele de pe coloana pivotului se înlocuiesc cu 0.
- Toate celelalte elemente se transformă cu regula dreptunghiului.

În iterațiile ulterioare se poate lucra numai cu blocul obținut prin excluderea liniilor și coloanelor pe care s-au ales deja pivoți. Procesul de iterație se încheie atunci când acest bloc devine nul. Evident că în acel moment matricea a căpătat forma  $E_{m,n;r}$  în care  $r$  este numărul iterațiilor și în același timp rangul matricei.

### *Exemplu*

Să se calculeze rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & 3 & -11 & -10 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & 14 & 12 & 12 \\ 0 & -8 & -2 & -8 & -10 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezultă că  $\text{rang}(A) = 3$ .

### LI.2.3. TEOREMA LUI KRONECKER ȘI CAPELLI

Fie sistemul linear scris sub forma matriceală  $AX = B$  având  $m$  ecuații și  $n$  necunoscute. Atunci:

- Sistemul este compatibil dacă și numai dacă  $\text{rang}(A|B) = \text{rang}A$ .
- În caz de compatibilitate, notând  $r = \text{rang}(A|B) = \text{rang}A$ , sistemul este determinat dacă  $r = n$ , iar dacă  $r < n$  atunci gradul de nedeterminare (numărul necunoscutelor secundare) este  $n - r$ .

*Demonstrație*

Reamintim că rezolvarea sistemului se face efectuând asupra matricei extinse un șir de transformări pe care le-am numit iterații.

$$(A|B) \Rightarrow (A^{(1)}|B^{(1)}) \Rightarrow \dots \Rightarrow (A^{(r)}|B^{(r)}) \Rightarrow$$

$$= \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(r)} & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1}^{(r)} & \dots & a_{1,n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & a_{22}^{(r)} & \dots & 0 & a_{2,r+1}^{(r)} & \dots & a_{2,n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r,r}^{(r)} & a_{r,r+1}^{(r)} & \dots & a_{r,n}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m^{(r)} \end{array} \right).$$

Așa cum am menționat transformările efectuate asupra matricei  $A$  precum și asupra matricei extinse  $(A|B)$  nu schimbă rangul: ele sunt transformări de tipul I, II, III efectuate numai asupra liniilor. Deci:  $\text{rang} A = \text{rang} A^{(r)}$  și  $\text{rang}(A|B) = \text{rang}\left(A^{(r)}|B^{(r)}\right)$ .

Dar  $\text{rang} A^{(r)} = r$  deoarece sunt îndeplinite cele două condiții din definiția rangului.

Pe de altă parte se observă că  $\text{rang}\left(A^{(r)}|B^{(r)}\right) = r \Leftrightarrow b_{r+1}^{(r)} = 0, b_{r+2}^{(r)} = 0, \dots, b_m^{(r)} = 0$  ceea ce demonstrează punctul I din enunțul teoremei.

Afirmația de la punctul II se bazează pe faptul că numărul natural  $r$  care este numărul necunoscutelor principale (numărul pivoților) este egal cu rangul comun al matricelor  $A$  și  $(A|B)$ . Q.E.D.

### Cazul sistemelor omogene

Dacă sistemul  $AX = B$  este omogen, adică  $B = 0$ , atunci el nu poate fi incompatibil deoarece orice sistem omogen are soluția banală. Distingem deci în acest caz două situații:

- Sistemul este determinat dacă admite numai soluția banală.
- Sistemul este nedeterminat dacă are cel puțin o soluție nebanală.

După teorema anterioară cunoscând rangul matricei  $A$  putem deduce dacă sistemul are numai soluția banală sau are cel puțin o soluție nebanală:

- Sistemul are numai soluția banală dacă rangul matricei coeficienților este egal cu numărul necunoscutelor.
- Sistemul are cel puțin o soluție nebanală dacă rangul matricei este strict mai mic decât numărul necunoscutelor.

Prezintă interes cazul când numărul  $n$  de ecuații este egal cu numărul de necunoscute. În acest caz matricea coeficienților este pătratică și deci determinantul ei este singurul minor de ordin  $n$ . Așadar:

*Un sistem omogen de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute admite soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul matricei coeficienților este nul.*

## LI.2.4. EXEMPLE PROPUSE

**EI.2.1.** Fie sistemul algebric liniar  $Ax = 0$  unde  $A$  este explicitat mai jos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

e) Să se calculeze  $\det(A)$

- f) În ce condiții matricea A este nesingulară
- g) Pentru A nesingulară să se determine inversa sa
- h) În situația de la c) determinați soluția sistemului algebric liniar.

**EI.2.2.** Pentru sistemul algebric dat anterior fie cazul particular  $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_{n-1} = a_n$ . Să se determine soluția sistemului dat

**EI.2.3.** Fie matricea A dată în EI.2.1. Să se determine rangul acesteia. Discuție.

## TEST DE AUTOEVALUARE

**E.AevI.1.** Se consideră sistemul algebric liniar

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,5x_1 - 3,2x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 + 0,3x_6 = 0,82 \\ -3,6x_1 + 2,5x_2 - 1,8x_3 - 0,6x_4 + 2x_6 = 0,59 \\ 3x_1 - 5x_2 + 0,7x_3 - 1,4x_4 - 4,2x_5 = -3,92 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1,8x_4 + 11x_5 = 1,91 \\ -3,2x_1 + 0,5x_2 + 2,5x_3 + 1,1x_4 + 3,8x_5 + 4,6x_6 = 1,89 \\ -5x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 3x_5 - 4x_6 = -0,24 \end{array} \right.$$

- a) Să se scrie sistemul algebric liniar dat sub forma matriceală  $Ax=b$ ;
- b) Să se determine forma Gauss a matricei A;
- c) Să se determine rangul matricei A;
- d) Să se rezolve sistemul dat folosind în mod expres forma Gauss a matricei A.

**E.AevI.2.** Pentru sistemul algebric dat anterior să se analizeze compatibilitatea utilizând metoda Kronecker -Capelli.

**E.AevI.3.** Fie sistemul algebric liniar  $Ax = b$  unde A și b sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{bmatrix}$$

- a) Să se calculeze  $\det(A)$ ;
- b) Să se determine inversa matricei  $A$ ;
- c) Să se rezolve sistemul algebric dat folosind metoda Cramer.

**E.AevI.4.** Fie sistemul algebric liniar  $Ax = b$  unde  $A$  și  $b$  sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & \alpha & 1 \\ 1 & 8 & \alpha - 1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Să se calculeze rangul matricei  $A$ , discuție după parametrul dat;
- b) Cât este soluția sistemului dacă  $\text{rang}(A)=4$ ?
- c) Discutați compatibilitatea sistemului în raport cu parametrul  $\alpha$ .

### Bibliografie I

1. Udriște C., ș.a., *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, EDP București, 1981.
2. Ion D.I., R. Nicolae, *Algebra*, EDP București, 1982.
3. Flondor D., N. Donciu, *Algebră și analiză matematică*, EDP București, 1979.