

MODULUL II

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL

În acest modul veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Calculul inversei unei matrice folosind sisteme algebrice liniare atașate;
- Matrice polinomiale;
- Formulele Newton;
- Un algoritm eficient de inversare matriceală (Krîlov), pretabil implementării pe calculator numeric;
- Matrice structurate pe blocuri;
- Operații cu matrice structurate pe blocuri.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în continuare, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu trebuie să fie cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Vă recomandăm să vă constituiți un caiet de probleme și, pentru fiecare tip de exercițiu, să vă fixați algoritmul de rezolvare pe etape. Rezolvați cât mai complet problemele propuse și cele conținute în testul de autoevaluare.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 5 ore.

LECȚIA II.1

METODE DE CALCUL A INVERSEI MATRICEALE

Parcurgând această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Determinarea inversei matriceale folosind sisteme algebrice liniare;
- Matrice polinomiale;
- Polinoame matriceale;
- Teorema Cayley –Hamilton;;
- Algoritmul Krîlov pentru calculul polinomului caracteristic și a adjunței.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 3 ore.

LII. 1.1. CALCULUL INVERSEI UNEI MATRICE PĂTRATICE PRIN METODA SISTEMELOR LINIARE

Reamintim că inversa unei matrice pătratice de ordinul n , $A = (a_{ij})$ este o altă matrice pătratică de ordinul n , $X = (x_{ij})$ care îndeplinește condiția: $A \cdot X = I_n$. Matricea X care să îndeplinească condiția menționată există dacă și numai dacă $\det(X) \neq 0$ și în acest caz ea este unic determinată și îndeplinește și condiția $X \cdot A = I_n$. Ea se notează A^{-1} .

Considerăm cunoscut faptul că matricea A este inversabilă (adică $\det(A) \neq 0$) și ne propunem să calculăm inversa ei. Relația $A \cdot X = I_n$ se scrie dezvoltat astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Așadar calculul inversei matricei A se reduce la rezolvarea acestui sistem liniar. El prezintă unele particularități care fac ca rezolvarea lui să fie foarte simplă.

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \dots + a_{2n}x_{n1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \dots + a_{nn}x_{n1} = 0 \end{cases}$$

Matricea coeficienților necunoscutelor este tocmai matricea A pe care vrem s-o inversăm. .

Așadar rezolvarea sistemului de n^2 ecuații cu n^2 necunoscute se reduce la rezolvarea a n sisteme fiecare de câte n ecuații cu n necunoscute.

Folosind metoda eliminării succesive expusă în capitolul anterior urmează ca acestei matrice extinse să se aplice niște transformări numite iterații:

26

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11}^{(n)} & 0 & \dots & 0 & b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & \dots & b_{1n}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & 0 & b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & \dots & b_{2n}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_{n1}^{(n)} & b_{n2}^{(n)} & \dots & b_{nn}^{(n)} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$$

Ultima matrice s-a obținut din penultima împărțind prima linie la $a_{11}^{(n)}$, a doua la $a_{22}^{(n)}$ și așa mai departe. Folosind prima coloană de termeni liberi obținem forma finală la care a ajuns primul sistem după cele $n + 1$ transformări:

$$\text{adică } \begin{cases} x_{11} = b_{11} \\ x_{21} = b_{21} \\ \dots\dots\dots \\ x_{n1} = b_{n1} \end{cases}$$

Scriind formele finale ale celorlalte sisteme obținem că $x_{ij} = b_{ij}$ pentru orice i și j , adică $A^{-1} = X = (b_{ij})$.

Așadar schema algoritmului este următoarea:

Se atașează matricei A matricea I_n . Acestei matrice extinse i se aplică $n + 1$ transformări astfel că în final pe locul matricei A va apare matricea I_n . În acel moment, pe locul ocupat inițial de I_n va apare matricea căutată A^{-1} :

$$(A|I_n) \Rightarrow (A^{(1)}|I_n^{(1)}) \Rightarrow (A^{(2)}|I_n^{(2)}) \Rightarrow \dots \Rightarrow (A^{(n)}|I_n^{(n)}) \Rightarrow (I_n|A^{-1}).$$

Observație

Dacă $\det(A) = 0$, adică $\text{rang } A < n$, atunci procesul de iterație se încheie după mai puțin de n iterații și cel puțin unul dintre sisteme apare ca incompatibil. Prin urmare nu este nevoie să verificăm în prealabil dacă $\det(A) \neq 0$: dacă această condiție nu este îndeplinită algoritmul dă ca rezultat faptul că matricea A nu are inversă.

Exemplu

Ne propunem să calculăm inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, având

elementele în corpul claselor de resturi modulo 5.

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right) = (I_4 | A^{-1}) \end{aligned}$$

LII.1.2. MATRICE POLINOMIALE, POLINOAME MATRICEALE. TEOREMA HAMILTON-CAYLEY

Definiții. Exemple

O *matrice polinomială* înseamnă o matrice alcătuită din polinoame. Pentru cerințele dezvoltării acestui capitol ne putem mărgini la matricele polinomiale pătratice de ordin oarecare n . O astfel de matrice se poate scrie în felul următor:

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) & \dots & p_{1n}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & \dots & p_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(\lambda) & p_{n2}(\lambda) & \dots & p_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} = (p_{ij}(\lambda))$$

în care $p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{(0)} + p_{ij}^{(1)} \cdot \lambda + p_{ij}^{(2)} \cdot \lambda^2 + \dots + p_{ij}^{(r)} \cdot \lambda^r$ este un polinom având coeficienții într-un corp comutativ K .

Numărul natural r nu este exact gradul polinomului: el este cel mai mare dintre gradele polinoamelor $p(\lambda)$. Aceasta înseamnă că pentru unele polinoame $p_{ij}(\lambda)$, elementul $p_{ij}^{(r)}$ poate fi nul.

Notând $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})$ matricea constituită din coeficienții de grad k ai tuturor polinoamelor $p_{ij}(\lambda)$ putem scrie matricea $P(\lambda)$ sub forma:

$$P(\lambda) = P^{(0)} + P^{(1)} \cdot \lambda + P^{(2)} \cdot \lambda^2 + \dots + P^{(r)} \cdot \lambda^r$$

care este un polinom având drept coeficienți matricele $P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(r)}$ și care din acest motiv se numește *polinom matriceal*.

Așadar orice matrice polinomială se poate scrie sub forma de polinom matriceal și, firește, invers: de la forma de polinom matriceal se poate trece la forma de matrice polinomială.

Între cele două forme remarcăm totuși următoarea deosebire: în forma de polinom matriceal variabila λ se poate înlocui atât cu un element din corpul K , dar și cu o *matrice pătratică de ordinul n* pe când în forma de matrice polinomială variabila λ se poate înlocui numai cu un element din corpul K .

Exemple

1) Fie $f(\lambda) = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \dots + a_r \cdot \lambda^r$ un polinom cu coeficienți *scalari* (adică elemente din corpul K). Acestui polinom i se poate atașa un polinom matriceal care se poate scrie și sub forma matriceală:

$$P_f(\lambda) = f(\lambda) \cdot I_n = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= a_0 \cdot I_n + (a_1 \cdot I_n) \cdot \lambda + (a_2 \cdot I_n) \cdot \lambda^2 + \dots + (a_r \cdot I_n) \cdot \lambda^r.$$

După cum am menționat, în forma de polinom matriceal, variabila λ se poate înlocui cu o matrice pătratică de ordinul n , să zicem A , și obținem:

$$P_f(A) = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \dots + a_r \cdot A^r$$

Convenim să notăm simplu $f(A)$ această matrice (în loc de $P_f(A)$) și observăm următoarea regulă de înlocuire a unei matrice A într-un polinom scalar: se înlocuiește variabila cu matricea A , iar *termenul liber se înmulțește cu matricea I_n* .

2). Fiecărei matrice pătratică A de ordinul n i se asociază polinomul matriceal de gradul unu: $P_A(\lambda) = A - \lambda \cdot I_n$ a cărei formă matriceală este:

$$P_A(\lambda) = A - \lambda \cdot I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Determinantul acestei matrice este un polinom (scalar) de gradul n în variabila λ , care se notează $\varphi_A(\lambda)$ și se numește *polinomul caracteristic al matricei A* . Coeficientul de gradul n al acestui polinom este, după cum se poate observa, $(-1)^n$.

Pentru uniformitate scriem acest polinom sub forma:

$$\varphi_A(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \cdot \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + (-1) \sigma_{n-1} \cdot \lambda + \sigma_n,$$

unde am notat σ_r coeficientul de gradul $n-r$ al polinomului caracteristic, cu semnul alternat $(-1)^r$.

Acest polinom joacă un rol important în calculul matriceal și de aceea prezintă interes modalitățile de calculare a coeficienților săi. În primul rând să observăm că

$$\sigma_n = \varphi_A(0) = \det(A).$$

Pe de altă parte, din formula de definiție a dezvoltării determinanților rezultă că termenul de gradul $n-1$ al polinomului se obține din produsul elementelor de pe diagonala matricei $A - \lambda \cdot I_n$, adică din produsul: $(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$. Rezultă că:

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

care este suma elementelor de pe diagonala matricei A . Această sumă se notează $Tr(A)$ și se numește *urma matricei A* .

În general σ_r se calculează după următoarea regulă: *este suma minorilor de ordin r ai matricei A care au diagonala suprapusă peste diagonala matricei A* . După cum se observă această regulă este îndeplinită de σ_1 și de σ_n .

Teorema Hamilton-Cayley

Pentru orice matrice A , este îndeplinită egalitatea: $\varphi_A(A) = 0$.

Demonstrație

Egalitatea din enunț se poate scrie desfășurat astfel:

$$(-1)^n A^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \cdot A^{n-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 \cdot A^{n-2} + \dots + (-1) \sigma_{n-1} \cdot A + \sigma_n \cdot I_n = 0.$$

în care 0 din membrul drept înseamnă matricea pătratică nulă de ordinul n .

Considerăm matricea $(A - \lambda \cdot I_n)^*$ adică *adjuncta matricei* $(A - \lambda \cdot I_n)$. Potrivit *metodei complementelor algebrici* de calculare a inversei unei matrice pătratice rezultă:

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot \frac{1}{\det(A - \lambda \cdot I_n)} (A - \lambda \cdot I_n)^* = I_n.$$

Folosind notația introdusă anterior, $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$, egalitatea de mai sus se poate scrie astfel:

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot (A - \lambda \cdot I_n)^* = \varphi_A(\lambda) \cdot I_n.$$

În această ultimă egalitate ambii membri sunt matrice polinomiale. *Variabila λ nu se poate înlocui cu o matrice.* Dar matricele polinomiale pot fi scrise ca polinoame matriceale în care variabila λ poate fi înlocuită cu matricea A . În membrul stâng se obține matricea nulă din cauza factorului $(A - \lambda \cdot I_n)$. Membrul drept devine tocmai $\varphi_A(A)$. Q.E.D.

Aplicație

Relația demonstrată oferă o formulă de calculare a inversei unei matrice pătratice în funcție de puterile ei.

Presupunem cunoscut faptul că matricea A este inversabilă. Înmulțind ambii membri ai egalității $\varphi_A(A) = 0$ cu matricea A^{-1} se obține:

$$(-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1} \sigma_1 \cdot A^{n-2} + \dots + (-1) \sigma_{n-1} \cdot I_n + \sigma_n \cdot A^{-1} = 0.$$

De unde:

$$A^{-1} = \frac{-1}{\sigma_n} \left[(-1)^n \cdot A^{n-1} + (-1)^{n-1} A^{n-2} + \dots + (-1) \cdot \sigma_{n-1} \cdot I_n \right].$$

Observații

1) Deși formula obținută exprimă inversa unei matrice în funcție de puterile ei (până la $n-1$), aplicarea ei întâmpină o dificultate: ea presupune cunoașterea coeficienților polinomului caracteristic.

Regula de calcul a lor, pe care am enunțat-o în secțiunea precedentă este practic aplicabilă pentru valori mici ale lui n și anume cel mult egal cu 4.

În secțiunea următoare vom elabora o metodă de calculare a coeficienților polinomului caracteristic.

2) Condiția că $\det(A) \neq 0$ este implicată în formula de calculare a lui A^{-1} : la numitor apare σ_n , care după cum se știe este tocmai $\det(A)$.

LII.1.3. FORMULELE LUI NEWTON

Valorile proprii ale unei matrice

În această secțiune vom dezvolta o metodă de calculare a coeficienților polinomului caracteristic:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + (-1) \sigma_{n-1} \cdot \lambda + \sigma_n$$

Notăm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rădăcinile polinomului $\varphi_A(\lambda)$. Ele se numesc *valorile proprii ale matricei A* și îndeplinesc *relațiile lui Viète*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sigma_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = \sigma_2 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_r} = \sigma_r \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \sigma_n \end{array} \right.$$

Deoarece $\sigma_1 = \text{Tr}(A)$ rezultă din prima formulă că:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{Tr}(A).$$

Deci: *suma valorilor proprii ale unei matrice este egală cu urma matricei.*

Valorile proprii ale unei matrice au și următoarea proprietate interesantă:

Propoziție

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A atunci $\lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r$ sunt valorile proprii ale matricei A^r .

Demonstrație

Din relația:

$$\begin{aligned} A^r - \lambda_i^r \cdot I_n &= A^r - (\lambda_i \cdot I_n)^r = (A - \lambda_i \cdot I_n) \times \\ &\times (A^{r-1} + A^{r-2} \cdot \lambda_i + A^{r-3} \cdot \lambda_i^2 + \dots + A \cdot \lambda_i^{r-2} + \lambda_i^{r-2} \cdot I_n) \end{aligned}$$

și ținând seamă că determinantul produsului de matrice este produsul determinantilor matricelor se obține:

$$\det(A^r - \lambda_i^r \cdot I_n) = \det[(A - \lambda_i \cdot I_n)] \times \\ \times \det\left[A^{r-1} + A^{r-2} \cdot \lambda_i + A^{r-3} \cdot \lambda_i^2 + \dots + A \cdot \lambda_i^{r-2} + \lambda_i^{r-2} \cdot I_n\right]$$

sau:

$$\varphi_{A^r}(\lambda_i^r) = \varphi_A(\lambda_i) \cdot \det\left[A^{r-1} + A^{r-2} \cdot \lambda_i + A^{r-3} \cdot \lambda_i^2 + \dots + A \cdot \lambda_i^{r-2} + \lambda_i^{r-2} \cdot I_n\right].$$

Așadar, dacă $\varphi_A(\lambda_i) = 0$, atunci $\varphi_{A^r}(\lambda_i^r) = 0$. Q.E.D.

Să notăm în continuare $S_r = \lambda_1^r + \lambda_2^r + \dots + \lambda_n^r$. Deoarece $\lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r$ sunt valorile proprii ale matricei A^r înseamnă că sumele S_r se pot calcula cu ușurință: $S_r = \text{Tr}(A^r)$. Vom stabili în continuare că dacă aceste sume sunt cunoscute atunci calculul coeficienților σ_r este foarte simplu.

Propoziție

Între sumele S_r și coeficienții σ_r sunt valabile următoarele relații:

$$\begin{cases} S_1 - \sigma_1 = 0 \\ S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0 \\ S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} S_1 + (-1)^r r \sigma_r = 0 \\ \dots\dots\dots \\ S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \sigma_2 S_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} S_1 + (-1)^n n \sigma_n = 0 \end{cases}$$

cunoscute sub numele de *formulele lui Newton*.

Demonstrație

Să exprimăm în două moduri derivata (formală, neavând semnificație topologică) polinomului $\varphi_A(\lambda)$. În primul rând,

$$[\varphi_A(\lambda)]' = (-1)^n n \lambda^{n-1} + (-1)^{n-1} (n-1) \sigma_1 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-r} (n-r) \sigma_r \lambda^{n-r-1} + \\ + \dots + (-1) \sigma_{n-1}$$

Pe de altă parte scriind: $\varphi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$, putem recalcula derivata polinomului caracteristic folosind regula de derivare a produsului:

$$\varphi_A(\lambda)' = \frac{\varphi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\varphi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}.$$

Câtul $\frac{\varphi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$ urmează să-l calculăm folosind *schema lui Horner*:

	λ^n	λ^{n-1}	λ^{n-2}	...	λ^{n-r}	...	λ^0
	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1} \sigma_1$	$(-1)^{n-2} \sigma_2$	...	$(-1)^{n-r} \sigma_r$	...	σ_n
λ_i	$(-1)^n$	$(-1)^n \lambda_i + (-1)^{n-1} \sigma_1$	$(-1)^n \lambda_i^2 + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda_i + (-1)^{n-2} \sigma_2$	...	$(-1)^n \lambda_i^r + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda_i^{r-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 \lambda_i^{r-2} + \dots + (-1)^{n-r+1} \sigma_{r-1} \lambda_i + (-1)^{n-r} \sigma_r$	...	$\varphi_A(\lambda_i)$

Coeficientul de grad $n - r - 1$ al derivatei polinomului $\varphi_A(\lambda)$ se obține însumând după i coeficientul de grad $n - r - 1$ al câtului $\frac{\varphi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$, care se află în coloana lui λ^{n-r} :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[(-1)^n \lambda_i^r + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda_i^{r-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 \lambda_i^{r-2} + \dots + (-1)^{n-r+1} \sigma_{r-1} \lambda_i + (-1)^{n-r} \sigma_r \right] = \\ & = (-1)^n S_r + (-1)^{n-1} \sigma_1 S_{r-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 S_{r-2} + \dots + (-1)^{n-r+1} \sigma_{r-1} S_1 + n(-1)^{n-r} \sigma_r \end{aligned}$$

În cealaltă expresie a derivatei coeficientul de grad $n - r - 1$ este $(-1)^{n-r} (n - r) \sigma_r$.

Deci:

$$\begin{aligned} & (-1)^n S_r + (-1)^{n-1} \sigma_1 S_{r-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 S_{r-2} + \dots + (-1)^{n-r+1} \sigma_{r-1} S_1 + n(-1)^{n-r} \sigma_r = \\ & = (-1)^{n-r} (n - r) \sigma_r \end{aligned}$$

Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu $(-1)^n$ și trecând totul în membrul stâng se obține:

$$S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} S_1 + (-1)^r r \sigma_r = 0.$$

adică tocmai relația generică din enunț. Q.E.D.

Exemplu

Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$

având elementele în corpul claselor de resturi modulo cinci. Ne propunem să calculăm polinomul caracteristic al matricei A folosind formulele lui Newton și apoi inversa matricei A .

Mai întâi calculăm puterile matricei A :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

din care apoi obținem: $S_1 = \text{Tr}A = 3$; $S_2 = \text{Tr}A^2 = 2$; $S_3 = \text{Tr}A^3 = 2$; $S_4 = \text{Tr}A^4 = 1$.

Înlocuind în formulele lui Newton se obține: $\sigma_1 = 3$; $\sigma_2 = 1$; $\sigma_3 = 3$; $\sigma_4 = 3$ și deci:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\sigma_4} [A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A - \sigma_3 I_4] = 3 [A^3 + 2A^2 + A + 2I_4] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

LII.1.4. ALGORITMUL LUI KRÂLOV

Teoremă

Data fiind matricea pătratică A de ordinul n considerăm șirul de operații:

$$\begin{aligned} A_1 &= A & p_1 &= \frac{1}{1} \text{Tr}(A_1) & B_1 &= A_1 - p_1 I_n \\ A_2 &= AB_1 & p_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(A_2) & B_2 &= A_2 - p_2 I_n \end{aligned}$$

$$A_3 = AB_2 \quad p_2 = \frac{1}{3} \text{Tr}(A_3) \quad B_3 = A_3 - p_3 I_n$$

.....

$$A_n = AB_{n-1} \quad p_n = \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n) \quad B_n = A_n - p_n I_n$$

Pentru orice $r = 1, 2, \dots, n$ sunt îndeplinite relațiile:

$$p_r = (-1)^{r-1} \sigma_r;$$

$$B_r = A^r - \sigma_1 A^{r-1} + \sigma_1 A^{r-2} - \dots (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} A + (-1)^r \sigma_r I_n.$$

Demonstrație

Folosim metoda inducției.

– Etapa de verificare:

$$p_1 = \text{Tr}(A_1) = \text{Tr}(A) = \sigma_1 = (-1)^{1-1} \sigma_1$$

$$B_1 = A_1 - p_1 I_n = A - \sigma_1 I_n = A^1 + (-1)^1 \sigma_1 I_n.$$

– Etapa de demonstrație:

Ipoteza: Pentru orice $k < r$,

$$p_k = (-1)^{k-1} \sigma_k,$$

$$B_k = A^k - \sigma_1 A^{k-1} + \sigma_2 A^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} A + (-1)^k \sigma_k I_n.$$

Concluzia

$$p_r = (-1)^{r-1} \sigma_r,$$

$$B_r = A^r - \sigma_1 A^{r-1} + \sigma_2 A^{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} A + (-1)^r \sigma_r I_n.$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} r p_r = \text{Tr} A_r = \text{Tr}(AB_{r-1}) &= \text{Tr} \left[A \left(A^{r-1} - \sigma_1 A^{r-2} + \sigma_2 A^{r-3} - \dots + (-1)^{r-2} \sigma_{r-2} A + \right. \right. \\ &\left. \left. + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} I_n \right) \right] = \text{Tr} \left(A^r - \sigma_1 A^{r-1} + \sigma_2 A^{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} A \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \sigma_r S_1 = S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \dots + \\
&+ (-1)^{r-1} \sigma_r S_1 + \left[(-1)^r r \sigma_r - (-1)^r r \sigma_r \right] = \left[S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \dots + \right. \\
&\left. + (-1)^{r-1} \sigma_1 S_1 + (-1)^r r \sigma_r \right] - (-1)^r r \sigma_1 = 0 - (-1)^r r \sigma_r = (-1)^{r-1} r \sigma_r.
\end{aligned}$$

În penultima egalitate am folosit egalitatea generică din formulele lui Newton:

$$S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \sigma_r S_1 + (-1)^r r \sigma_r = 0.$$

Începutul și sfârșitul din șirul de egalități de mai sus dă: $rp_r = (-1)^{r-1} r \sigma_r$ de unde rezultă relația cerută: $p_r = (-1)^{r-1} \sigma_r$.

Pentru a doua egalitate:

$$\begin{aligned}
B_r &= A_r - p_r I_n = AB_{r-1} - p_r I_n = A \left[A^{r-1} - \sigma_1 A^{r-2} + \sigma_2 A^{r-3} - \dots + \right. \\
&\left. + (-1)^{r-2} \sigma_{r-2} A + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} I_n \right] - (-1)^{r-1} \sigma_r I_n = A^r - \sigma_1 A^{r-1} + \sigma_2 A^{r-2} - \dots + \\
&+ (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} A + (-1)^r \sigma_r I_n. \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

Aplicație

Din teorema de mai sus, folosind teorema Hamilton-Caylay, rezultă:

$$B_n = A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} A + (-1)^n \sigma_n I_n = \varphi_A(A) = 0.$$

Pe de altă parte din $B_n = A_n - p_n I_n = AB_{n-1} - p_n I_n$ se obține: $AB_{n-1} = B_n + p_n I_n$ adică:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}.$$

Observație

Ținând seamă de expresia lui B_{n-1} egalitatea de mai sus este identică cu cea rezultată din teorema Hamilton-Caylay. Important este însă faptul că B_{n-1} și deci și A^{-1} se obține prin algoritmul descris în teorema de mai sus.

Exemplu

Ne propunem să calculăm inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A_1 = A &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & p_1 = \text{Tr}(A_1) &= 3 & B_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 6 & 5 & -11 \\ 6 & -10 & 18 \end{pmatrix} & p_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(A_2) &= 15 & B_2 &= \begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 6 & -10 & -11 \\ 6 & -10 & 3 \end{pmatrix} \\
A_3 = AB_2 &= \begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} & p_3 &= \frac{1}{3} \text{Tr}(A_3) &= -28 & B_3 &= A_3 - p_3 I_3 = 0
\end{aligned}$$

Se observă că s-a verificat relația $B_3 = 0$ și s-a obținut:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_3} B_2 = \frac{-1}{28} \begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 6 & -10 & -11 \\ 6 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

LII.1.5. PROBLEME PROPUSE

PP.II.1.5.1 Pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1,5 & -3,2 & 6 & 4 & 1 & 0,3 \\ -3,6 & 2,5 & -1,8 & -0,6 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 0,7 & -1,4 & -4,2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1,8 & 11 & 0 \\ -3,2 & 0,5 & 2,5 & 1,1 & 3,8 & 4,6 \\ -5 & 1 & 0,5 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

să se determine inversa folosind metoda bazată pe sisteme liniare.

PP.II.1.5.2 Fie matricea reală

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cu elemente din corpul claselor de resturi modulo 7. Să se determine inversa folosind metoda bazată pe tabloul extins.

PP.II.1.5.3 Fie matricea reală

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cu elemente din corpul claselor de resturi modulo 5. Să se determine polinomul caracteristic folosind formulele Newton și apoi să se determine inversa sa.

LECȚIA II.2

MATRICE STRUCTURATE

În această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definierea matricelor structurate pe blocuri;
- Operațiile uzuale cu matrice structurate pe blocuri;
- Calculul rangului unei matrice structurate pe blocuri;
- Rezultate referitoare la rangul matricelor compuse prin operațiile elementare;
- Teoreme fundamentale referitoare la rang matriceal.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 3 ore.

L.II.2.1 OPERAȚII CU MATRICE ÎMPĂRȚITE ÎN BLOCURI

Înmulțirea matricelor cu ajutorul blocurilor

Convenim să marcăm astfel: A faptul că A este o matrice de tip (m, n)

adică având m linii și n coloane.

După cum se știe pentru ca două matrice să se poată aduna ele trebuie să aibă același tip. Rezultatul adunării este o matrice de același tip cu matricele care se adună.

$$\left(\begin{array}{cc} A & B \\ (m,n) & (m,n) \end{array} \right) \rightarrow (A + B)_{(m,n)}$$

În ceea ce privește înmulțirea, pentru ca să se poată efectua produsul AB trebuie ca *numărul coloanelor primei matrice să fie egal cu numărul liniilor celei de a doua matrice*, iar rezultatul înmulțirii lor *are atâtea linii câte are prima matrice și atâtea coloane câte are a doua matrice*:

$$\left(\begin{array}{cc} A & B \\ (m,n) & (n,p) \end{array} \right) \rightarrow AB_{(m,p)}$$

Fie matricea A de tip (m, n) și să-i împărțim cele m linii într-un număr r de grupe:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$$

și analog cele n coloane:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_s$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{matrix}} \right\} m_1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{matrix}} \right\} m_2 \\ \vdots \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{matrix}} \right\} m_r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & \dots & n_s \end{matrix}$$

Trasând linii despărțitoare între grupele de linii și de coloane matricea apare împărțită în submatrice numite *blocuri* sau *celule*:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

în care A_{ij} este blocul aflat la intersecția grupeii i având m_i linii cu grupa j (m_i, n_j)

având n_j coloane. Așa cum s-a menționat, tipul acestei matrice este (m_i, n_j) .

Fie acum o altă matrice B , de tip (n, p) , astfel că se poate efectua produsul AB și să considerăm o astfel de împărțire în blocuri a acestei matrice încât să se îndeplinească următoarea condiție: *gruparea liniilor lui B coincide cu gruparea coloanelor lui A* . Deci:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_s,$$

iar

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_t,$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{st} \end{pmatrix}.$$

Dacă în loc de blocurile A_{ij} și B_{ij} ar fi scalari atunci s-ar putea obține o matrice:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & C_{st} \end{pmatrix}$$

de tip (r, t) în care $C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}$. Dar deoarece A_{ij} și B_{ij} sunt matrice, se pun două probleme: în primul rând dacă se pot efectua produsele $A_{ik} B_{kj}$, iar în al doilea rând dacă aceste produse se pot aduna. Deoarece A_{ik} are tipul (m_i, n_k) , iar B_{kj} are tipul (n_k, p_j) rezultă că se pot efectua aceste produse. Pe de altă parte matricea produs este de tip (m_i, p_j) care nu depinde de k . Așadar toți termenii sumei care-l definesc pe C_{ij} sunt matrice de același tip, deci se pot aduna.

Pe de altă parte să considerăm matricea produs AB pe care s-o împărțim în blocuri după următoarea grupare a liniilor și coloanelor: $m = m_1 + m_2 + \dots, m_r$; $p = p_1 + p_2 \dots p_t$. Se pune problema dacă această matrice coincide cu matricea C , formată din blocurile menționate mai sus. Răspunsul este afirmativ, dar demonstrația formală ar fi destul de încâlcită și nu ar aduce nimic nou în înțelegerea rezultatului care trebuie reținut:

Două matrice se pot înmulți cu ajutorul blocurilor dacă gruparea coloanelor primei matrice coincide cu gruparea liniilor celei de a doua matrice. Rezultatul este o matrice împărțită în blocuri având atâtea linii de blocuri câte are prima matrice și atâtea coloane de blocuri câte are a doua matrice.

Exemple

Pentru o matrice oarecare A de tip (m, n) se pot considera următoarele celulări remarcabile:

1) *Celularea pe linii.* Cele m linii ale matricei A se împart în m grupe, câte o linie în fiecare grupă în timp ce coloanele se înglobează, toate n , într-o singură grupă. Matricea A va avea așadar m linii de blocuri și o singură coloană de blocuri:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix},$$

în care $a_{i*} = (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \dots \cdot a_{im})$ este linia i a matricei A .

2) *Celularea pe coloane.* De această dată se înglobează toate cele m linii într-o singură grupă iar cele n coloane se distribuie în n grupe, câte o coloană în fiecare grupă. Matricea A va avea o singură linie de blocuri:

$$A = (a_{*1} \ a_{*2} \ \dots \ a_{*n}),$$

blocurile fiind coloanele matricei A :

$$a_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

3) *Celularea într-un singur bloc.* Grupăm atât cele m linii într-o singură grupă cât și cele n coloane într-o singură grupă. Matricea A va avea o singură linie și o singură coloană de blocuri, adică va fi constituită dintr-un singur bloc:

$$A = (A).$$

4) *Celularea trivială.* Grupăm cele m linii în m grupe, câte una în fiecare grupă și la fel, cele n coloane le distribuim în n grupe, câte una în fiecare grupă. Blocurile vor fi toate matrice cu o singură linie și o singură coloană, în fond tocmai elementele matricei A .

Aplicații

I) Considerăm pentru matricea A , de tip (m, n) , celularea pe linii iar pentru matricea B , de tip (n, p) , deci care se poate înmulți cu A , celularea pe coloane. Înmulțirea se poate face cu ajutorul blocurilor deoarece atât coloanele matricei A , cât și liniile matricei B sunt înglobate într-o singură grupă.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{*1} & b_{*2} & \dots & b_{*n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1*}b_{*1} & a_{1*}b_{*2} & \dots & a_{1*}b_{*n} \\ a_{2*}b_{*1} & a_{2*}b_{*2} & \dots & a_{2*}b_{*n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m*}b_{*1} & a_{m*}b_{*2} & \dots & a_{m*}b_{*n} \end{pmatrix}.$$

După cum se vede blocurile matricei produs sunt tocmai elementele acestei matrice, adică s-a obținut celularea trivială. Din această exprimare a produsului a două matrice citim faptul că *elementul de pe linia i și coloana j a produsului a două matrice se obține înmulțind linia i a primei matrice cu coloana j a celei de a doua matrice.*

II) Să calculăm același produs AB , dar considerând matricea A celulată pe coloane și matricea B celulată pe linii. Înmulțirea se poate efectua cu ajutorul

blocurilor deoarece atât coloanele primei matrice cât și liniile celei de a doua matrice sunt grupate în n grupe, câte una în fiecare grupă. Rezultatul va avea o singură linie de blocuri (cât are prima matrice) și o singură coloană de blocuri (cât are a doua matrice), adică matricea produs va fi alcătuită dintr-un singur bloc:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \dots \\ b_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{*1}b_1^* + a_{*2}b_2^* + \dots + a_{*n}b_n^* \end{pmatrix}.$$

Unicul bloc al matricei produs este scris ca suma a n matrice, una oarecare dintre ele fiind:

$$a_{*k}b_k^* = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k}b_{k1} & a_{1k}b_{k2} & \dots & a_{1k}b_{kp} \\ a_{2k}b_{k1} & a_{2k}b_{k2} & \dots & a_{2k}b_{kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mk}b_{k1} & a_{mk}b_{k2} & \dots & a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}.$$

Această matrice are însușirea că este de rang cel mult unu. Deci, *produsul a două matrice se poate exprima ca suma a n matrice de rang cel mult unu.*

III) Pentru aceeași înmulțire a matricelor A și B să considerăm pentru prima matrice celularea trivială, iar pentru a doua matrice celularea pe linii.

Coloanele primei matrice, la fel ca și liniile celei de a doua matrice sunt grupate în n grupe, câte una în fiecare grupă, deci se poate face înmulțirea cu ajutorul blocurilor:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \dots \\ b_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1^* + a_{12}b_2^* + \dots + a_{1n}b_n^* \\ a_{21}b_1^* + a_{22}b_2^* + \dots + a_{2n}b_n^* \\ \dots \\ a_{m1}b_1^* + a_{m2}b_2^* + \dots + a_{mn}b_n^* \end{pmatrix}.$$

Matricea produs este acum constituită dintr-o singură coloană de blocuri, aceste blocuri fiind tocmai liniile matricei produs. Observăm că: *Liniile matricei produs sunt combinații liniare de liniile celei de a doua matrice. Pentru linia i a produsului, coeficienții combinației liniare sunt elementele de pe linia i a primei matrice.*

IV) Efectuăm același produs AB luând pentru prima matrice celularea pe coloane, iar pentru a doua celularea trivială. Liniile primei matrice, la fel ca și coloanele celei de a doua matrice sunt grupate în n grupe, câte una în fiecare, deci se poate efectua înmulțirea cu ajutorul blocurilor:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{*1} + b_{21}a_{*2} + \dots + b_{n1}a_{*n} & b_{12}a_{*1} + b_{22}a_{*2} + \dots + b_{n2}a_{*n} + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Avem acum informații despre *coloanele matricei produs* și anume că ele sunt combinații liniare de coloanele primei matrice. Pentru coloana j a produsului coeficienții combinației liniare sunt elementele coloanei j a celei de a doua matrice.

V) Pentru efectuarea produsului AB considerăm pentru matricea A celularea pe linii, iar pentru matricea B să considerăm celularea „într-un singur bloc”. Atât coloanele primei matrice, cât și liniile celei de a doua matrice sunt înglobate într-o singură grupă deci se poate efectua înmulțirea cu ajutorul blocurilor:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix} (B) = \begin{pmatrix} a_{1*}B \\ a_{2*}B \\ \dots \\ a_{m*}B \end{pmatrix}$$

De aici rezultă că *liniile matricei produs se obțin înmulțind (la stânga) liniile primei matrice cu cea de a doua matrice*.

VI) Efectuăm produsul AB luând pentru prima matrice celularea „într-un singur bloc”, iar pentru a doua celularea pe coloane. Înmulțirea se poate face cu ajutorul blocurilor:

$$AB = (A) \begin{pmatrix} b_{*1} & b_{*2} & \dots & b_{*p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ab_{*1} & Ab_{*2} & \dots & Ab_{*p} \end{pmatrix}$$

de unde citim: *coloanele produsului a două matrice se obțin înmulțind prima matrice (la stânga) cu coloanele celei de a doua matrice*.

LII.2.2. UN ALT MOD DE SCRIERE A SISTEMELOR LINIARE

Fie sistemul liniar $AX = B$. Alegând pentru matricea A celularea pe coloane, înmulțirea AX se poate efectua cu ajutorul acestora. În fond, rezultatul

înmulțirii este o singură coloană, care se obține înmulțind unica coloană a lui X cu linia celor n coloane ale matricei A :

$$x_1 a_{*1} + x_2 a_{*2} + \dots + x_n a_{*n} = B.$$

Scriș sub această formă, compatibilitatea sistemului are următoarea semnificație: *coloana B a termenilor liberi se poate scrie ca o combinație liniară de coloanele matricei A .*

Rangul produsului a două matrice

Propoziție

$$\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}A, \text{rang}B).$$

Demonstrație

Inegalitatea din enunț este echivalentă cu două inegalități:

$$\text{rang}(AB) \leq \text{rang}B \text{ și } \text{rang}(AB) \leq \text{rang}A.$$

Pentru a demonstra pe prima pornim de la matricea B căreia-i aplicăm un șir de transformări ajungând în final la matricea AB :

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ \dots \\ b_{n*} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ \dots \\ b_{n*} \\ a_{11}b_{1*} + a_{12}b_{2*} + \dots + a_{1n}b_{n*} \\ \dots \\ a_{m1}b_{1*} + a_{m2}b_{2*} + \dots + a_{mn}b_{n*} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ AB \end{pmatrix} \rightarrow AB$$

Să observăm că prin aceste trei transformări rangul nu crește ci cel mult se micșorează.

În prima transformare se adaugă matricei B , celulată pe linii, încă m linii nule. În a doua, liniile nule se înlocuiesc cu combinații liniare de primele n linii. Fiind vorba de acele transformări de tipul III, prin această transformare rangul rămâne iarăși neschimbat. Pe de altă parte observăm că ultimele linii constituie tocmai matricea produs AB .

În a treia transformare se înlocuiesc primele n linii cu linii nule. Prin această transformare rangul s-ar putea să scadă, dar în orice caz nu poate să crească.

În ultima transformare se renunță la primele n linii nule, transformare care nu modifică rangul. Rezultă că:

$$\text{rang} B \geq \text{rang}(AB).$$

A doua inegalitate se demonstrează în mod analog. Q.E.D

LII.2.3. PROBLEME PROPUSE

PP.II.2.3.1 Fie sistemul algebric liniar $AX = B$ unde A și B sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

și unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- Ce dimensiuni are blocul nul din A ?
- Ce dimensiuni are soluția X ?
- Scrieți matricea X structurată pe blocuri compatibile dimensional cu celelalte matrici din sistemul liniar dat;

PP.II.2.3.2 Pentru sistemul algebric liniar dat anterior să se dea rezolvarea cea mai potrivită folosind în mod expres structurarea pe blocuri a matricilor componente.

PP.II.2.3.3 Fie matricea A de forma generală

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{bmatrix}$$

în care blocurile din diagonală sunt nesarabile. Dați un algoritm de calcul al matricei inverse care să țină cont de structura bloc triunghiulară.

TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.II.1 Pentru matricea A explicitată în continuare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

să se determine inversa folosind metoda bazată pe sisteme liniare.

TAev.II.2 Fie matricea reală

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cu elemente din corpul claselor de resturi modulo 7. Să se determine inversa folosind metoda bazată pe tabloul extins.

TAev.II.3 Fie matricea reală

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cu elemente din corpul claselor de resturi modulo 7. Să se determine polinomul caracteristic folosind formulele Newton și apoi să se determine inversa sa.

TAev.II.4 Fie sistemul algebric liniar $AX = B$ unde A și B sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

și unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- d) Ce dimensiuni are blocul nul din A ?
- e) Ce dimensiuni are soluția X ?
- f) Scrieți matricea X structurată pe blocuri compatibile dimensional cu celelalte matrici din sistemul liniar dat;

TAev.II.5 Fie matricea A de forma generală

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

în care blocurile din diagonala sunt nesingulare. Dați un algoritm de calcul al matricei inverse care să țină cont de structura bloc triunghiulară.

TEST DE CONTROL

TC.2.1 Se consideră sistemul algebric liniar

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_5 = 5 \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -3 \\ x_1 + x_3 - 8x_4 = -1 \\ x_1 + 1,5x_2 + 2,5x_3 + x_4 + 3x_5 = 1,5 \end{array} \right.$$

- Să se scrie sistemul algebric liniar dat sub forma matriceală $Ax=b$;
- Să se determine forma Gauss a matricei A ;
- Să se determine rangul matricei A ;
- Să se rezolve sistemul dat folosind în mod expres forma Gauss a matricei A .

TC.2.2 Pentru sistemul algebric dat anterior să se analizeze compatibilitatea utilizând metoda Kronecker -Capelli.

TC.2.3 Fie sistemul algebric liniar $Ax = b$ unde A și b sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 27 & 64 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Să se calculeze $\det(A)$;
- Să se determine inversa matricei A ;
- Să se rezolve sistemul algebric dat folosind metoda Cramer.

TC.2.4 Fie sistemul algebric liniar $Ax = b$ unde A și b sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & \alpha - 2 & 0 \\ 1 & 8 & \alpha - 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Să se calculeze rangul matricei A, discuție după parametrul dat;
b) Cât este soluția sistemului dacă $\text{rang}(A)=4$?
c) Discutați compatibilitatea sistemului în raport cu parametrul α .

TC.2.5 Pentru matricea A explicitată în continuare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

să se determine inversa folosind metoda bazată pe sisteme liniare.

TC.2.6 Fie matricea reală

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cu elemente din corpul claselor de resturi modulo 4. Să se determine inversa folosind metoda bazată pe tabloul extins.

TC.2.7 Fie matricea reală din exemplul precedent. Să se determine polinomul caracteristic folosind formulele Newton și apoi să se determine inversa sa.

TC.2.8 Fie sistemul algebric liniar $AX = B$ unde A și B sunt explicitate mai jos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

și unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- g) Ce dimensiuni are blocul nul din A?

h) Ce dimensiuni are soluția X?

i) Scrieți matricea X structurată pe blocuri compatibile dimensional cu celelalte matrici din sistemul liniar dat;

TC.2.9 Fie matricea A de forma generală

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_3 \end{bmatrix}$$

în care blocurile din diagonala principală sunt nesingulare. Dați un algoritm de calcul al matricei inverse care să țină cont de structura bloc.

Bibliografie

1. Udriște C., ș.a., *-Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
2. Ion D.I., R. Nicolae, *-Algebra*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
3. Flondor D., N. Donciu, *-Algebră și analiză matematică-culegere de probleme*, vol I Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
4. Otlăcan E., *-Algebră superioară-îndrumar teoretic și culegere de probleme*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1995.
5. Mânzatu E., Gârban V. *-Algebră cu aplicații rezolvate la calculatorul electronic*, Editura Academiei Militare, București, 1982.