

MODULUL III

CALCUL VECTORIAL

Parcurgând acest modul veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Noțiunile de vector și scalar;
- Operațiile fundamentale de adunare a vectorilor și de înmulțire cu scalari;
- Spații, subspații;
- Baze pentru spații și subspații;
- Coordonate ale vectorilor în baze specificate;
- Schimbarea de baze;
- Produsul scalar;
- Produsul vectorial;
- Produs mixt.

Materialul prezentat are o logică matematică corectă, cu o înlănțuire firească a noțiunilor; de aceea se recomandă parcurgerea sa completă, în ordinea dată, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu trebuie să fie cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Vă recomandăm să vă constituiți un caiet de probleme și, pentru fiecare tip de exercițiu, să vă fixați algoritmul de rezolvare pe etape. Rezolvați cât mai complet problemele propuse și cele conținute în testul de autoevaluare.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 6 ore.

LECȚIA III.1

NOTIUNI FUNDAMENTALE REFERITOARE LA VECTORI ȘI SPAȚII VECTORIALE

În această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Noțiunile de vector și scalar;
- Operațiile fundamentale de adunare a vectorilor și de înmulțire cu scalari;
- Spații, subspații;
- Baze pentru spații și subspații;
- Coordonate ale vectorilor în baze specificate;
- Schimbarea de baze;

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 2 ore.

LIII.1.1 NOȚIUNEA DE VECTOR

Noțiunea de *vector* se definește prin trei atribute ale sale: *direcția, mărimea și sensul*. În acest context cele trei atribute sunt considerate noțiuni primare, ele nu se definesc, precizăm doar că au înțelesul pe care le atribuie vorbirea obișnuită.

Pentru elaborarea calculului vectorial folosim următoarea fixare a cadrului noțiunii de vector: orice vector *se reprezintă* printr-o săgeată în spațiul fizic în care trăim. O săgeată oferă o direcție bine determinată, o mărime (lungimea săgeții) și un sens, indicat de vârful săgeții.

Vectorul nu se identifică cu săgeata care-l reprezintă deoarece săgeata are încă un atribut pe lângă cele trei ale vectorului și anume *punctul de aplicație*. Totuși vectorul se identifică cu clasa tuturor săgeților care au aceeași lungime, direcție și sens.

Orice punct al spațiului (fizic) este punctul de aplicație al unei săgeți care reprezintă un vector dat. Pe de altă parte, dacă fixăm punctul de aplicație, există

o singură săgeată care reprezintă un vector dat. Așadar mulțimea (clasa) săgeților care reprezintă un vector dat are atâtea elemente câte puncte are spațiul. Fixând un punct O al spațiului, mulțimea vectorilor (pe care o notăm cu) se poate identifica cu mulțimea săgeților care au punctul de aplicație (sursa) în O .

Într-un alt context, de exemplu în mecanică, este nevoie să se atribuie vectorului și atributul de punct de aplicație. De pildă dacă două forțe au aceeași mărime și direcție și sensuri contrare, ele vor avea efect nul dacă au același punct de aplicație și un efect nenul dacă au puncte diferite de aplicație. În astfel de situații pentru a deosebi vectorul care se identifică cu o săgeată (având deci și punct de aplicație) de cel în care se face abstracție de punctul de aplicație (așa cum se face în calculul vectorial) se obișnuiește să se numească acesta din urmă *vector liber*. În alte situații este util să se identifice săgețile care au punctul de aplicație pe o anumită dreaptă, obținându-se astfel o altă noțiune de vector numit *vector glisant* (alunecător).

Convenție de notație

În calculul vectorial se operează simultan cu două feluri de mărimi: vectoriale și numerice (care se mai numesc și *scalare*).

Pentru a nu fi nevoie să se precizeze de fiecare dată natura mărimilor cu care se operează se obișnuiește să se adopte o notație care să distingă mărimile vectoriale de cele scalare. Foarte adesea se marchează cu o *săgeată sau o liniuță orizontală deasupra literelor care desemnează vectori*. În expunerea care urmează vom folosi litere grecești pentru a desemna mărimi scalare și litere latine pentru mărimi vectoriale: $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \xi \in R$ și $a, b, \dots, u, v, w \in V$.

LIII.1.2 ADUNAREA VECTORILOR ȘI ÎNMULȚIREA VECTORILOR CU NUMERE. PROPRIETĂȚI

Adunarea vectorilor: definiție, proprietăți

Se poate defini în două moduri suma a doi vectori $u, v \in V$:

- Regula paralelogramului:

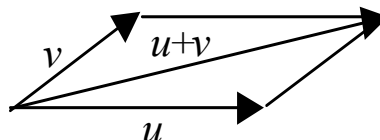


Fig. 3.1

- Regula triunghiului:

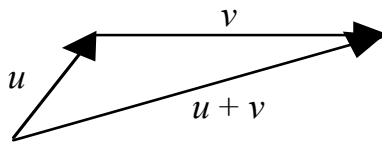


Fig. 3.2

Se reprezintă vectorul v prin săgeata care are originea în capătul săgeții care-l reprezintă pe u . Vectorul $u + v$ este reprezentat de săgeata care are originea comună cu originea lui u și capătul comun cu capătul lui v .

Evident că ambele reguli conduc la același rezultat.

Proprietățile adunării

1. *Comutativitatea*: $u + v = v + u$. Regula paralelogramului conține deja o simetrie relativ la vectorii u și v .
2. *Asociativitatea*: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

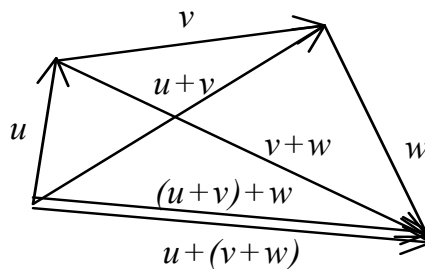


Fig. 3.3

3. *Elementul de efect nul*: Completăm mulțimea $\mathbf{V}$ cu un element pe care-l notăm $\theta \in \mathbf{V}$ definit ca *vectorul reprezentat de o săgeată care are originea și capătul în același punct*. Folosind regula triunghiului este evident că $u + \theta = u$ și $\theta + u = u$ pentru orice $u \in \mathbf{V}$.
4. *Elementul opus*: Vectorului u îi asociem vectorul $(-u)$ reprezentat de săgeata care are originea în capătul lui u și capătul în originea lui u . Folosind regula triunghiului este evident că $u + (-u) = \theta$ și $(-u) + u = \theta$.

În concluzie: Mulțimea $\mathbf{V}$ a vectorilor cu operația de adunare, $(\mathbf{V}, +)$ este grup abelian.

Înmulțirea vectorilor cu numere

Definiție

Notăm $|v|$ lungimea unui vector V .

Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și $v \in V$ definim vectorul αv astfel:

- direcția lui αv coincide cu direcția lui v .
- $|\alpha v| = |\alpha| |v|$.
- Sensul lui αv este același cu al lui v dacă $\alpha > 0$ și opus lui v dacă $\alpha < 0$.

Rămâne de analizat cazul când $\alpha = 0$, în care nu se precizează sensul. Dar din faptul că $|0v| = |0| |v| = 0$, rezultă că $0v = \theta$ și deci vectorul $0v$ nu are direcție și nici sens.

Proprietăți

1. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
2. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
3. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.
4. $1u = u$.

Demonstrație

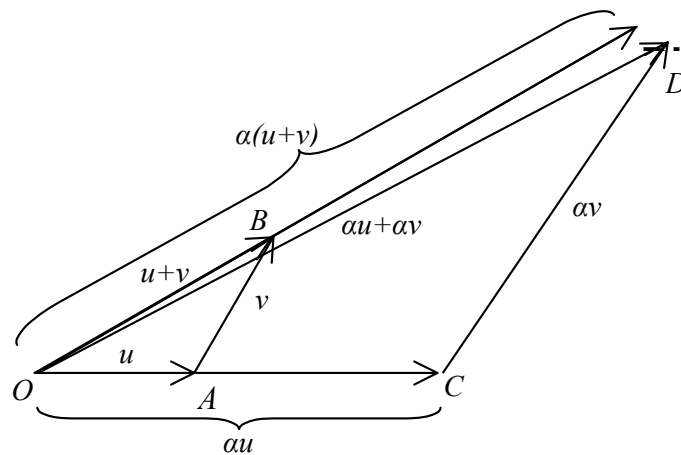


Fig. 3.4

Pentru a demonstra prima proprietate să presupunem că $\alpha > 0$ (și chiar $\alpha > 1$) și să observăm că triunghiurile OAB și OCD sunt asemenea, deoarece:
$$\frac{OC}{OA} = \frac{|\alpha u|}{|u|} = |\alpha| = \alpha = \frac{|\alpha v|}{|v|} = \frac{CD}{AB},$$
 iar AB fiind paralelă cu CD rezultă că unghiul A este egal cu unghiul C .

Din asemănarea triunghiurilor rezultă că unghiurile AOB și COD sunt egale, adică OD trece prin B . Rezultă că vectorii $\alpha(u+v)$ și $\alpha u + \alpha v$ au aceeași direcție și sens.

Din asemănarea celor două triunghiuri mai rezultă că $CD = \alpha AB$, iar pe de altă parte $CD = |\alpha(u+v)| = \alpha|u+v| = \alpha AB$. Deci vectorii $\alpha(u+v)$ și $\alpha u + \alpha v$ au și aceeași mărime.

Cu modificări corespunzătoare ale figurii se demonstrează egalitatea vectorilor ce intervin în proprietatea 1) și pentru cazul când $\alpha < 0$, precum și atunci când α este între zero și unu.

Pentru proprietatea 2) să observăm că vectorii $(\alpha + \beta)u$ și $\alpha u + \beta u$ au aceeași direcție cu vectorul u . Dacă α și β au același semn atunci vectorii $(\alpha + \beta)u$ și $\alpha u + \beta u$ au același sens, iar $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ de unde rezultă $|(\alpha + \beta)u| = |\alpha + \beta||u| = |\alpha||u| + |\beta||u| = |\alpha u| + |\beta u| = |\alpha u + \beta u|$. Ultima egalitate se bazează pe faptul că vectorii αu și βu au același sens. Dacă α și β au semne contrare atunci, pe de o parte $|\alpha + \beta| = ||\alpha| - |\beta||$, iar pe de altă parte vectorii având sensuri opuse (și, așa cum am spus, aceeași direcție) rezultă că:

$$\begin{aligned} |\alpha u + \beta u| &= |(|\alpha u| - |\beta u|)| = |(|\alpha||u| - |\beta||u|)| = |(|\alpha| - |\beta|)||u| = \\ &= |(|\alpha| - |\beta|)||u| = |\alpha + \beta||u| = |(\alpha + \beta)u|. \end{aligned}$$

La fel, în relația din proprietatea 3), vectorii $(\alpha\beta)u$ și $\alpha(\beta u)$ au aceeași direcție cu u . În plus, $|\alpha(\beta u)| = |\alpha||\beta u| = |\alpha||\beta||u| = |\alpha\beta||u| = |(\alpha\beta)u|$. Evident că au același sens sau sens contrar față de u după cum α și β au același semn sau sunt de semne contrarii.

În relația 4) vectorii u și $1u$ au aceeași direcție și același sens (deoarece $1 > 0$), iar $|1u| = |1||u| = |u|$. Q.E.D.

În concluzie, *mulțimea V împreună cu cele două operații, are structură de spațiu vectorial.*

LIII.1.3 SUBSPAȚII, BAZE, COORDONATE

Definiție

Se numește *subspațiu al spațiului vectorial V* o submulțime U a lui V care are proprietățile:

1. Dacă $u, v \in U$ atunci $u + v \in U$.
2. Dacă $u \in U$ atunci $\alpha u \in U$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Evident că întregul spațiu V , precum și submulțimea formată numai din vectorul nul, θ , sunt subspații. Ele sunt exemple banale, dar trebuie menționate în lista tuturor subspațiilor, listă care va fi completată în continuare.

Subspații de dimensiune 1

Fie d o dreaptă din spațiu și să notăm V_d mulțimea vectorilor reprezentați de săgeți situate pe dreapta d . Ținând seamă de modul cum s-au definit operațiile de adunare a vectorilor și de înmulțire a numerelor cu vectori se deduce fără dificultate că V_d este subspațiu.

Evident că dacă dreptele d și d' sunt paralele atunci $V_d = V_{d'}$, iar dacă d și d' nu sunt paralele atunci V_d și $V_{d'}$ au un singur vector în comun: vectorul nul, θ .

Considerăm acum un vector *nenul* a din subspațiul V_d . Din definiția subspațiului (și de fapt se poate constata cu ușurință și direct) pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha a \in V_d$. Interesant este că este adevărat și reciproc: Dacă $u \in V_d$, atunci există (și este unic) un număr α astfel încât $u = \alpha a$.

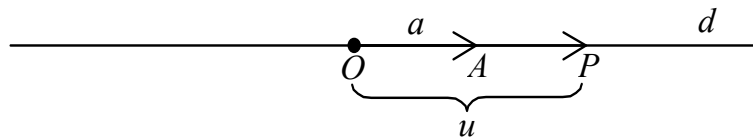


Fig. 3.5

Într-adevăr, fixând punctul O pe dreapta d orice vector se reprezintă printr-o săgeată bine determinată având originea în O . Fie OA săgeata care reprezintă vectorul fixat a și OP săgeata care reprezintă vectorul u . Avem: $u = \alpha a$ unde $\alpha = \pm \frac{OP}{OA}$ cu semnul (+) sau (-) după cum vectorul u are același sens sau sens opus față de a .

Așadar toți vectorii subspațiului V_d se pot exprima cu ajutorul unui singur vector, vectorul a . Spunem că mulțimea formată de vectorul a constituie o *bază a subspațiului*. Numărul α , bine determinat, care îndeplinește condiția $u = \alpha a$, se numește *coordonata vectorului u în baza constituită de unicul vector a* .

Orice vector, în afară de vectorul nul, poate să constituie o bază. Prezintă interes cazul în care baza este alcătuită dintr-un *versor*, adică un vector care are lungimea egală cu unitatea de lungime folosită. Există doi versori ai subspațiului corespunzând celor două sensuri ale drepte d .

În cazul unei astfel de baze coordonata unui vector este chiar lungimea vectorului, luată cu semnul + sau - după cum vectorul are același sens sau sensul opus vectorului bazei.

Subspațiile V_d au baze formate dintr-un singur vector, motiv pentru care ele se numesc *subspații de dimensiune 1*. Orice subspațiu de dimensiune unu este de forma V_d în care d este o dreaptă având *direcția* vectorului bazei. Prin

urmare sunt atâtea subspații de dimensiune egală cu unu câte *direcții* sunt în spațiu.

Subspații de dimensiune 2

Fie π un plan și să notăm V_π mulțimea vectorilor reprezentați de săgeți situate în planul π . Faptul că mulțimea V_π constituie un subspațiu rezultă nemijlocit din definițiile operațiilor de adunare a vectorilor și de înmulțire a vectorilor cu numere.

Evident că dacă π și π' sunt două plane paralele atunci $V_\pi = V_{\pi'}$ iar dacă π și π' nu sunt paralele atunci notând cu d dreapta lor comună, atunci subspațiile V_π și $V_{\pi'}$ vor avea în comun vectorii din subspațiul $V_d: V_\pi \cap V_{\pi'} = V_{\pi \cap \pi'}$.

Să considerăm acum doi vectori *necolineari*, a și b , în subspațiul V_π . Faptul că a și b sunt necolineari înseamnă, din punct de vedere geometric, că nu pot fi reprezentați de săgeți situate pe aceeași dreaptă iar din punct de vedere algebric, necolinearitatea înseamnă că nu există nici un număr λ astfel că $a = \lambda b$ sau $b = \lambda a$. Vom arăta că oricare ar fi un vector $u \in V_\pi$ există și sunt *unice* numerele α și β astfel încât $u = \alpha a + \beta b$.

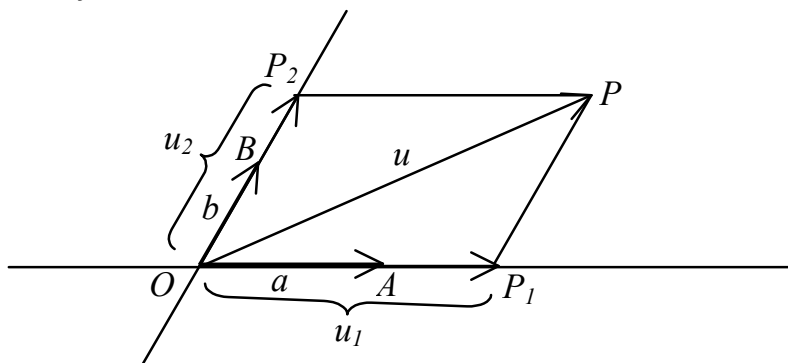


Fig. 3.6

Fixând un punct O al planului orice vector din V_π se reprezintă printr-o săgeată bine determinată având originea în punctul O . Așa cum se vede din figură vectorii a, b și u sunt reprezentați respectiv de săgețile OA, OB, OP .

Paralela dusă prin P la OB taie dreapta OA în P_1 iar paralela dusă prin P la OA taie dreapta OB în P_2 . Din regula paralelogramului rezultă că $u = u_1 + u_2$ în care u_1 și u_2 sunt vectorii reprezentați respectiv de săgețile OP_1 și OP_2 .

Dar u_1 și a sunt vectori reprezentați de săgeți având ca suport aceeași dreaptă și conform exemplului anterior există un număr α astfel încât $u_1 = \alpha a$. Analog există un număr β astfel încât $u_2 = \beta b$. Rezultă că $u = \alpha a + \beta b$.

Pentru a demonstra unicitatea numerelor α și β presupunem că ar exista α' și β' astfel încât $u = \alpha'a + \beta'b$. De aici rezultă că $(\alpha - \alpha')a + (\beta - \beta')b = \theta$.

Dacă ar fi $\alpha - \alpha' \neq 0$ atunci: $a = -\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}b$ adică a ar fi colinear cu b .

În concluzie, orice vector din subspațiul V_π se exprimă în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor fixați a și b . Din acest motiv spunem că vectorii a și b constituie o bază a subspațiului V_π . Numerele α și β , coeficienții combinației liniare $u = \alpha a + \beta b$, se numesc *coordonatele vectorului u în baza constituită de vectorii a și b* .

Prezintă interes cazul când vectorii bazei sunt *versori ortogonali*. În acest caz, baza se numește *ortonormată*.

Un exemplu remarcabil de bază ortonormată este aceea constituită din versorii axelor unui sistem de axe ortogonale xOy . Acești versori au o notație consacrată: $\vec{i}$, respectiv $\vec{j}$. În prezentarea acestui exemplu vom adopta celălalt stil de marcare a vectorilor: cu săgeată deasupra literei ce desemnează vectorul respectiv.

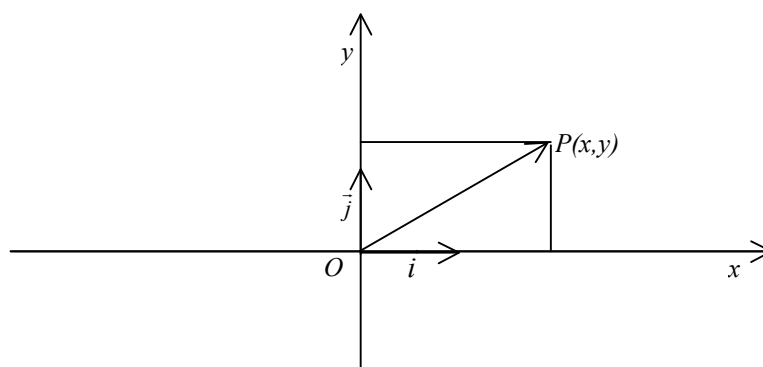


Fig. 3.7

Folosind punctul O ca origine a săgeților orice vector este determinat de un punct al planului care reprezintă capătul săgeții.

Relativ la sistemul de axe xOy orice punct P este determinat la rândul său de *coordonatele sale carteziane* x și y .

Folosind baza constituită de vectorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$, coordonatele vectorului de poziție al punctului oarecare P (adică ale vectorului $\overrightarrow{OP}$) sunt tocmai coordonatele carteziane ale punctului P . Obținem astfel legătura dintre calculul vectorial și geometria analitică:

Coordonatele vectorului de poziție ale punctului P în baza constituită de versorii unui sistem de coordonate carteziane sunt tocmai coordonatele carteziane ale punctului P . În plus, coordonatele vectorului reprezentat de săgeata P_1P_2 se obțin scăzând coordonatele carteziane ale sursei din coordonatele carteziane ale capătului vectorului.

Subspațiile V_π au baze formate din doi vectori și de aceea ele se numesc subspații de dimensiune doi. Orice subspațiu de dimensiune doi (având deci o bază constituită din doi vectori, să zicem a și b) este de forma V_π și anume π este planul determinat de vectorii a și b .

Subspații de dimensiune 3

Fie trei vectori *necoplanari*: a, b, c . La fel ca și în plan se poate arăta că orice vector se poate exprima în mod unic ca o combinație liniară de vectorii a, b, c și din acest motiv spunem că vectorii a, b, c constituie o bază. Coeficienții scrierii unui vector ca o combinație liniară de vectorii bazei se numesc, la fel, *coordonatele vectorului* în acea bază.

Orice sistem de trei vectori necoplanari constituie o bază e_1, e_2, e_3 . Potrivit terminologiei adoptate mai înainte, deoarece spațiul vectorial V are baze formate din trei vectori înseamnă că el are dimensiunea trei.

La fel ca și în cazul spațiilor bidimensionale prezintă interes bazele constituite din versori ortogonali doi câte doi, numite *baze ortonormate*.

Folosindu-ne de baza ortonormată constituită din versorii axelor unui sistem de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$ obținem aceleași reguli care fac legătura dintre geometria analitică și calculul vectorial, reguli care au fost formulate mai sus pentru geometria analitică plană.

L.III.1.4 PROBLEME PROPUSE

PP.III.1.4.1 Să se arate că 3 vectori necoliniari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pot forma un triunghi dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Să se exprime vectorii așezați pe medianele $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CP}$ ale triunghiului ABC cu ajutorul vectorilor $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ și $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ și să se arate că $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CP}$ pot forma un triunghi.

PP.III.1.4.2 În trapezul isoscel $ABCD$ (cu baza mare AB) se cunosc vectorii: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{BC}| = b$ și $\angle A = 60^\circ$. Să se scrie vectorii $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

PP.III.1.4.3 Să se arate că dacă $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ sunt vectorii de poziție a trei puncte coliniare M, M_1, M_2 , atunci există un scalar α astfel încât:

$$\vec{r} = \alpha \vec{r}_1 + (1 - \alpha) \vec{r}_2 \text{ (ecuația vectorială a dreptei } M_1M_2 \text{)}.$$

PP.III.1.4.4 Să se determine valorile parametrilor reali m și n pentru care vectorii următori sunt coliniari:

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + n\vec{k} \text{ și } \vec{b} = m\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}.$$

PP.III.1.4.5 Să se determine valoarea parametrului real α astfel încât vectorii următori să fie coplanari: $\vec{V}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{V}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \alpha\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Pentru α astfel determinat să se afle relația de dependență liniară dintre cei trei vectori.

L.III.1.5 TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.III.1.5.1 În hexagonul regulat $ABCDEF$ se cunosc vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Să se exprime cu ajutorul lor vectorii: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$.

TAev.III.1.5.2 În triunghiul ABC se cunosc vectorii: $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ și $b = \overrightarrow{CA}$. Să se afle vectorul $\overrightarrow{AA_1}$ situat pe bisectoarea interioară, cu ajutorul vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

TAev.III.1.5.3 Să se demonstreze că patrulaterul ale cărui vârfuri au vectorii de poziție: $A: \vec{r}_1 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $B: \vec{r}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $C: \vec{r}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $D: \vec{r}_4 = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, este paralelogram.

TAev.III.1.5.4 Știind că $\vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, și $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{j}$, să se afle componentele vectorului $\vec{a} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$ după direcțiile vectorilor $\vec{p}$ și $\vec{q}$ (coordonatele lui $\vec{a}$ în baza $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ a spațiului bidimensional respectiv).

TAev.III.1.5.5 Știind că $\vec{p} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, să se afle componentele vectorului $\vec{v} = 11\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$ după direcțiile vectorilor $\vec{p}$, $\vec{q}$ și $\vec{r}$ (coordonatele lui $\vec{v}$ în baza $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ a spațiului tridimensional respectiv).

LECȚIA III.2

Operații cu vectori

În această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Produsul scalar al vectorilor;
- Produsul vectorial al vectorilor;
- Produsul mixt pentru trei vectori;
- Produsul dublu vectorial.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 4 ore.

LIII.2.1. PRODUSUL SCALAR: DEFINIȚIE, PROPRIETĂȚI, FORMULA DE CALCUL.

Definiția produsului scalar

Pentru fiecare pereche de vectori $u, v \in V$ se asociază numărul $u \cdot v = |u||v|\cos(u, v)$ numit *produsul scalar al vectorilor u și v* .

Prin $\cos(u, v)$ înțelegem cosinusul unghiului dintre vectorii u și v , iar $|u|$ înseamnă lungimea vectorului u . Așa cum am procedat și în secțiunea precedentă folosim același semn atât pentru lungimea (sau mărimea) vectorilor, cât și pentru valoarea absolută a numerelor; contextul ne ferește de confuzii.

Se pot întâlni mai multe notații pentru produsul scalar. În acest capitol vom nota produsul scalar prin $u \cdot v$ eventual cu omisiunea punctului.

De remarcat că operația astfel definită *nu este o operație internă* deoarece fiecărei perechi de vectori se asociază nu tot un vector ci un scalar, un număr.

Din definiția produsului scalar se vede că dacă unul dintre vectorii u și v este nul atunci produsul lor scalar este nul. Altfel, dacă vectorii u și v sunt ambii nenuli atunci produsul lor scalar este nul dacă și numai dacă vectorii sunt ortogonali.

Dacă vectorii nu sunt ortogonali atunci produsul scalar este un număr strict pozitiv sau strict negativ după cum unghiul dintre ei este ascuțit sau obtuz.

Interpretare geometrică

Să observăm următoarea interpretare geometrică a produsului scalar:

$$u \cdot v = |u| \cdot pr_u(v) \text{ sau } u \cdot v = |v| \cdot pr_v(u),$$

adică produsul scalar se obține prin înmulțirea lungimii unui vector cu lungimea proiecției celuilalt pe el.

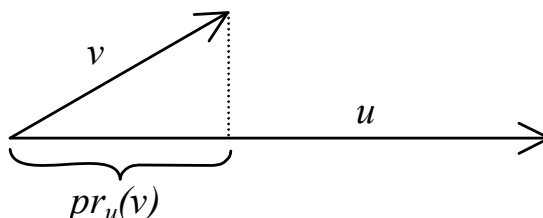


Fig. 3.8

Din punct de vedere geometric proiecția vectorului v pe vectorul u este o lungime, deci este un număr pozitiv. Dar prin $pr_u(v)$ înțelegem această lungime luată cu semnul plus sau minus după cum unghiul dintre vectorii u și v este ascuțit sau obtuz, adică după cum $\cos(u, v)$ este pozitiv sau negativ.

Se ia deci semnul plus sau minus după cum proiecția vectorului v pe vectorul u (considerată ca vector) are același sens sau sens contrar vectorului u .

Proprietăți ale produsului scalar

Vom demonstra următoarele proprietăți ale produsului scalar:

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (comutativitatea).
2. $u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2$ (distributivitatea față de adunare).
3. $(\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$.
4. $u \cdot u \geq 0$ și $u \cdot u = 0$ dacă și numai dacă $u = \theta$.

Ultima proprietate este evidentă din definiția produsului scalar.

Prima proprietate rezultă din faptul că funcția cosinus este o funcție pară, valoarea ei nu se schimbă dacă se schimbă semnul unghiului.

Demonstrăm proprietatea a doua: $u \cdot (v_1 + v_2) = |u| pr_u(v_1 + v_2) = |u| [pr_u(v_1) + pr_u(v_2)] = |u| pr_u(v_1) + |u| pr_u(v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2$.

Proprietatea a treia: $(\alpha u) \cdot v = |\alpha u| |v| \cos(\alpha u, v) = |\alpha| |u| |v| \cos(\alpha u, v)$. Considerăm în continuare două cazuri după cum α este pozitiv sau negativ.

Dacă α este pozitiv atunci $|\alpha| = \alpha$, iar αu are nu numai aceeași direcție cu u , dar și același sens astfel încât $\cos(\alpha u, v) = \cos(u, v)$.

Dacă α este negativ atunci, pe de o parte $|\alpha| = -\alpha$ iar pe de altă parte αu are sensul opus lui u astfel încât unghiul dintre αu și v este suplementul

unghiului dintre u și v și deci $\cos(\alpha u, v) = -\cos(u, v)$. În concluzie rezultă că în ambele cazuri $|\alpha| \cos(\alpha u, v) = \alpha \cos(u, v)$. Reluând egalitățile de mai sus obținem: $|\alpha u||v| \cos(\alpha u, v) = |\alpha||u||v| \cos(\alpha u, v) = \alpha u \cos(\alpha u, v) = \alpha(u \cdot v)$.

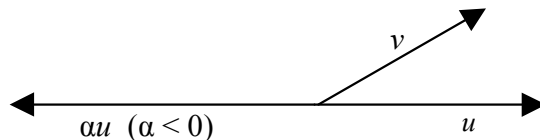


Fig. 3.9

O formulă de calcul a produsului scalar

Să considerăm o bază ortonormată, de exemplu aceea formată din versorii axelor de coordonate carteziane ortogonale $Oxyz$. Acești versori au o notație consacrată: $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$.

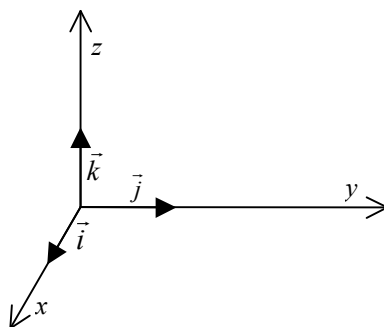


Fig. 3.9

Pentru a înlesni parcurgerea altor cărți care folosesc calculul vectorial utilizăm aici cealaltă convenție de notație în care vectorii sunt marcați cu o săgeată.

Ținând seamă că $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$ sunt versori ortogonali și din comutativitatea produsului scalar rezultă: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ și $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.

Fie u_1, u_2, u_3 coordonatele lui $\vec{u}$ și v_1, v_2, v_3 coordonatele vectorului $\vec{v}$ în baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ adică: $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ și $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Folosind proprietățile II și III precum și produsele scalare ale vectorilor $\vec{i}, \vec{j}$ și $\vec{k}$ obținem următoarea formulă pentru calculul produsului scalar a doi vectori în funcție de coordonatele lor într-o bază ortonormată.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

LIII.2.2. PRODUSUL VECTORIAL: DEFINIȚIE, PROPRIETĂȚI, FORMULA DE CALCUL

Definiția produsului vectorial

Pentru orice pereche de vectori u și v din spațiul vectorial $\blacktriangleright$ se construiește vectorul $u \times v$ în felul următor:

- direcția lui $u \times v$ este perpendiculară pe planul determinat de vectorii u și v ;
- mărimea lui $u \times v$ este dată de formula: $|u \times v| = |u||v|\sin(u, v)$;
- sensul lui $u \times v$ este dat de regula șurubului drept.

Observăm că dacă unul dintre vectorii u și v este nul, sau dacă sunt colineari atunci ei nu definesc un plan. Dar pe de altă parte în aceste cazuri lungimea lui $u \times v$ este egală cu zero, deci $u \times v$ este vectorul nul, θ , care nu are nici direcție și nici sens, deci nu se simte lipsa planului determinat de cei doi vectori.

Tot din expresia lungimii produsului vectorial se vede că acestea sunt singurele cazuri când $u \times v = \theta$: dacă vectorii u și v sunt ambii nenuli și necolineari atunci $u \times v \neq \theta$.

Spre deosebire de produsul scalar, rezultatul înmulțirii vectoriale este un vector, adică *produsul vectorial este o operație internă pe V* .

Interpretarea geometrică a lungimii produsului vectorial

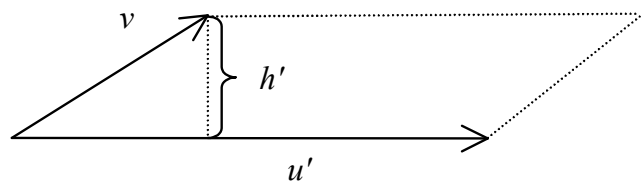


Fig. 3.11

După cum se vede din figură, $|u \times v| = |u||v|\sin(u, v) = |u|h$ și reprezintă aria paralelogramului determinat de cei doi vectori. Așadar, *lungimea produsului vectorial a doi vectori este numeric egală cu aria paralelogramului determinat de cei doi vectori*.

Așa cum s-a menționat și în titlu, este vorba aici numai de un atribut al produsului vectorial și anume lungimea sa. Produsul vectorial este un vector care pe lângă lungime are și direcție și sens.

Proprietățile produsului vectorial

1. $u \times v = -v \times u$ (antisimetria).
2. $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$ (omogenitatea).

3. $u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2$ (distributivitatea față de adunare).

Demonstrație

Prima proprietate rezultă din regula care determină sensul produsului vectorial: sensul în care se rotește v pentru a se suprapune peste u , cu un unghi mai mic decât 180° este opus sensului de rotire a lui u pentru a se suprapune peste v .

Pentru proprietatea a doua să considerăm numai una din cele două egalități și anume: $\alpha u \times v = \alpha(u \times v)$ și vom demonstra că vectorii din cei doi membri ai egalității au aceeași direcție, lungime și sens.

Direcția lui $\alpha(u \times v)$ este aceeași cu direcția lui $u \times v$. Pe de altă parte planul determinat de vectorii αu și v este același cu planul determinat de vectorii u și v , deci vectorul $(\alpha u) \times v$ are direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorii u și v , ca și $u \times v$, deci vectorii $(\alpha u) \times v$ și $\alpha(u \times v)$ au aceeași direcție.

În ce privește lungimea, să remarcăm mai întâi că dacă $\alpha > 0$ atunci unghiul dintre αu și v este același cu unghiul dintre u și v , iar dacă $\alpha < 0$ atunci unghiul dintre αu și v este suplementul unghiului dintre u și v .

Ambele unghiuri dau deci aceeași valoare prin funcția $\sin$. Deci:

$$|\alpha u \times v| = |\alpha u||v|\sin(\alpha u, v) = |\alpha||u||v|\sin(u, v) = |\alpha||u \times v| = |\alpha(u \times v)|.$$

Vectorii $(\alpha u) \times v$ și $\alpha(u \times v)$ au evident același sens dacă $\alpha > 0$. Dacă $\alpha < 0$ atunci pe de o parte sensul lui $\alpha(u \times v)$ este opus lui $u \times v$. Pe de altă parte sensul lui αu fiind opus lui u rezultă că sensul de rotire a vectorului αu pentru a se suprapune peste v este opus sensului în care trebuie să se rotească u pentru a se suprapune peste v . Înseamnă că sensul lui $(\alpha u) \times v$ este opus sensului lui $u \times v$ adică are același sens cu $\alpha(u \times v)$.

Demonstrația distributivității este mai complicată. Ea este prezentată în cele ce urmează.

Demonstrația distributivității produsului vectorial față de adunare

Se va efectua demonstrația în mai multe etape:

Etapa I

Reducem demonstrația la cazul când u este versor. Presupunem deci că egalitatea $u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2$ este adevărată atunci când u este versor. Dacă u nu este versor atunci există un număr α , astfel încât $u = \alpha u'$, în care u'

este versor: $\alpha = |u|$ iar $u' = \frac{1}{|u|}u$. Înseamnă că $u' \times (v_1 + v_2) = u' \times v_1 + u' \times v_2$ și

$$\begin{aligned} \text{deci: } u \times (v_1 + v_2) &= (\alpha u')(v_1 + v_2) = \alpha [u' \times (v_1 + v_2)] = \alpha (u' \times v_1 + u' \times v_2) = \\ &= \alpha (u' \times v_1) + \alpha (u' \times v_2) = (\alpha u') \times v_1 + (\alpha u') \times v_2 = u \times v_1 + u \times v_2 \end{aligned}$$

Etapa II

Fie u un versor reprezentat printr-o săgeată (pe care o notăm tot cu u) și notăm π planul perpendicular pe u trecând prin sursa lui u . Pentru orice vector v reprezentat printr-o săgeată având aceeași sursă cu u , notăm v' proiecția vectorului v pe planul π . Vom arăta că: $u \times v = u \times v'$.

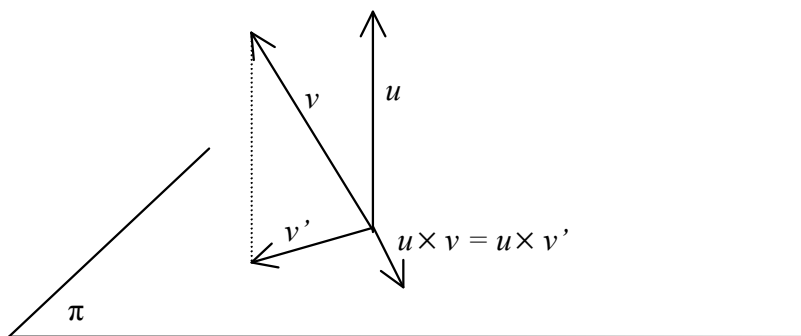


Fig. 3.12

Linia punctată din figură fiind paralelă cu suportul lui u rezultă că vectorii (săgețile) u, v, v' sunt în același plan. Înseamnă că planul determinat de u și v este același cu planul determinat de u și v' , deci $u \times v$ și $u \times v'$ au aceeași direcție. Cât privește lungimea, ținând seamă că unghiul dintre u și v' este drept, adică $|v| \sin(u, v) = |v'|$, rezultă: $|u \times v| = |u||v| \sin(u, v) = |u||v'| = |u||v'| \sin(u, v') = |u \times v'|$.

Pe de altă parte din figură se vede că sensul în care trebuie rotit u pentru a se suprapune peste v este același cu sensul în care se rotește u pentru a se suprapune peste v' , chiar dacă v se află în semispațiul opus lui u față de planul π . Deci $u \times v$ și $u \times v'$ au același sens.

Etapa III

Ne propunem să arătăm că dacă v' se află în planul π , atunci $u \times v'$ se obține din v' prin rotirea sa cu 90° în jurul lui u în sens trigonometric privit din semispațiul în care se află u .

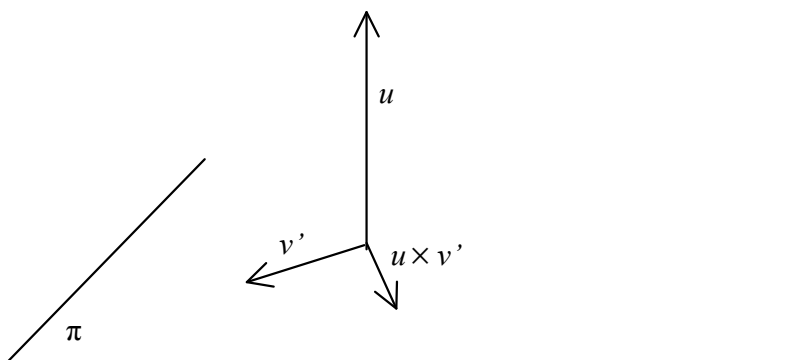


Fig. 3.13

În fond, deoarece $u \times v'$ este perpendicular pe u rezultă că $u \times v'$ se află în planul π . Pe de altă parte $u \times v'$ este perpendicular și pe v' , iar sensul este cel care corespunde rotirii lui v' în sens trigonometric, privit din semispațiul în care se află u . În ce privește lungimea, $|u \times v'| = |u||v'|\sin(u, v') = |v'|$ deoarece $|u| = 1$, iar u și v' sunt perpendiculari.

Etapă IV

Vom demonstra distributivitatea înmulțirii vectoriale a lui u față de adunarea vectorilor din planul π : $u \times (v'_1 + v'_2) = u \times v'_1 + u \times v'_2$.

Vectorii v'_1 , v'_2 și $v'_1 + v'_2$ sunt două laturi alăturate și diagonala unui paralelogram. În etapa anterioară am arătat că $u \times v'_1$, $u \times v'_2$ și $u \times (v'_1 + v'_2)$ se obțin prin rotirea cu un unghi drept a acestor laturi și a diagonalelor. Ele vor fi tocmai laturile și diagonala paralelogramului rotit, deci:

$$u \times (v'_1 + v'_2) = u \times v'_1 + u \times v'_2.$$

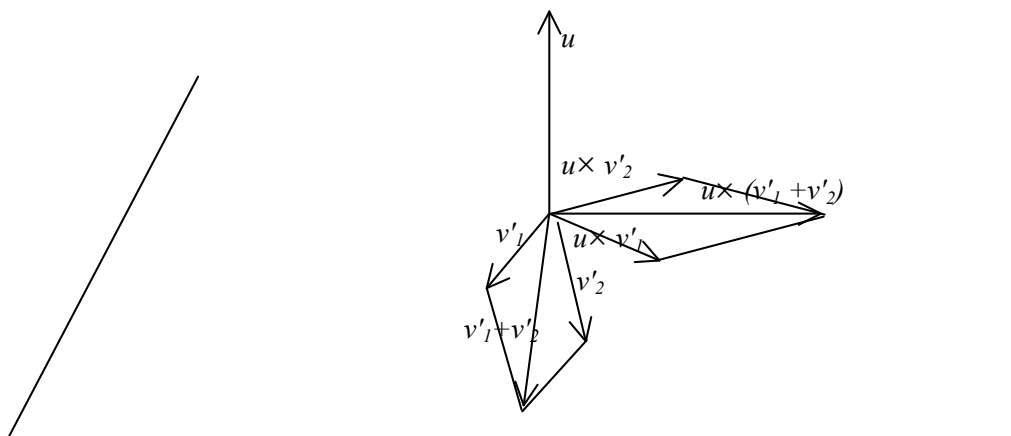


Fig. 3.14

Etapă V

În această ultimă etapă vom demonstra relația:

$$u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2$$

în care u este un versor. Notăm $v'_1, v'_2, (v_1 + v_2)'$ proiecțiile vectorilor $v_1, v_2, v_1 + v_2$, pe planul π . Evident, $(v_1 + v_2)' = v'_1 + v'_2$ și: din *etapa II* rezultă $u \times (v_1 + v_2) = u \times (v'_1 + v'_2) = u \times v'_1 + u \times v'_2$. Cum v'_1 și v'_2 sunt vectori din planul π , conform *etapei V* rezultă că $u \times (v'_1 + v'_2) = u \times v'_1 + u \times v'_2$.

Aplicând din nou etapa II, obținem: $u \times v'_1 + u \times v'_2 = u \times v_1 + u \times v_2$.
Q.E.D.

Formula de calcul a produsului vectorial

Considerăm baza ortonormată formată din versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai unui sistem de axe ortogonale $Oxyz$ și notăm u_1, u_2, u_3 respectiv v_1, v_2, v_3 coordonatele vectorilor $\vec{u}$, respectiv $\vec{v}$ în această bază, adică: $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Din faptul că $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versori ortogonali și din proprietățile demonstrate rezultă: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \theta$, $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$. Folosind apoi distributivitatea produsului vectorial față de adunare se obține:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) = \\ &= (u_1\vec{i}) \times (v_1\vec{i}) + (u_1\vec{i}) \times (v_2\vec{j}) + (u_1\vec{i}) \times (v_3\vec{k}) + \\ &+ (u_2\vec{j}) \times (v_1\vec{i}) + (u_2\vec{j}) \times (v_2\vec{j}) + (u_2\vec{j}) \times (v_3\vec{k}) + \\ &+ (u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i}) + (u_3\vec{k}) \times (v_2\vec{j}) + (u_3\vec{k}) \times (v_3\vec{k}) = \\ &= (u_1v_1)(\vec{i} \times \vec{i}) + (u_1v_2)(\vec{i} \times \vec{j}) + (u_1v_3)(\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ (u_2v_1)(\vec{j} \times \vec{i}) + (u_2v_2)(\vec{j} \times \vec{j}) + (u_2v_3)(\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ (u_3v_1)(\vec{k} \times \vec{i}) + (u_3v_2)(\vec{k} \times \vec{j}) + (u_3v_3)(\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Ultimul rezultat se poate scrie sub formă de determinant, astfel că se obține formula:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

LIII.2.3. PRODUSUL MIXT, PRODUSUL DUBLU VECTORIAL

Produsul mixt

Definiție

Pentru orice triplet de vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ din spațiul vectorial V se asociază numărul $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ numit *produsul mixt al vectorilor* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, care se notează $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Deci pentru a obține produsul mixt a trei vectori se înmulțesc vectorial primii doi iar vectorul rezultat se înmulțește scalar cu al treilea.

Interpretare geometrică

Produsul mixt are următoarea interpretare geometrică: valoarea sa absolută este *volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori*.

Într-adevăr, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$.

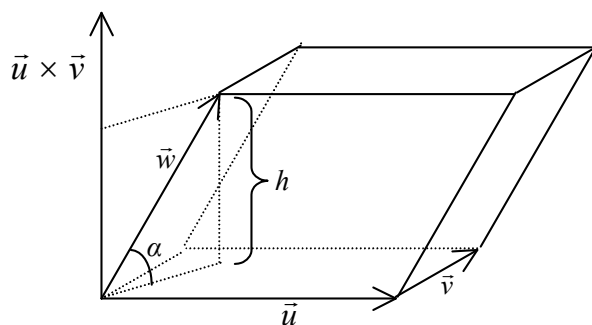


Fig. 3.15

Presupunem că unghiul dintre $\vec{u} \times \vec{v}$ și $\vec{w}$ este ascuțit, așa cum apare în figură. În acest caz unghiul dintre $\vec{u} \times \vec{v}$ și $\vec{w}$ este complementul unghiului α dintre $\vec{w}$ și planul bazei paralelipipedului. Deci $|\vec{w}| \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{w}| \sin \alpha = h$, înălțimea paralelipipedului. Cum $|\vec{u} \times \vec{v}|$ reprezintă aria bazei, se obține că $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ este egal cu volumul paralelipipedului.

Dacă unghiul dintre $\vec{u} \times \vec{v}$ și $\vec{w}$ este obtuz atunci supliantul acestui unghi este egal cu complementul lui α și deci $|\vec{w}| \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = -|\vec{w}| \sin \alpha = h$. Produsul mixt este egal tot cu volumul paralelipipedului luat însă cu semnul minus.

Formula de calcul

Pentru a stabili formula de calcul să considerăm o bază ortonormată, și pentru a fixa ideile fie baza constituită din versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai axelor

rectangulare $Oxyz$ și fie $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Reamintim că

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Pe de altă parte din formula de calcul a produsului scalar rezultă:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1).$$

S-a obținut ca rezultat tocmai dezvoltarea determinantului de ordinul trei având pe linii coordonatele celor trei vectori:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Proprietăți

Din formula de calcul, folosind proprietățile determinantilor, se deduc imediat următoarele proprietăți ale produsului mixt:

1. Produsul mixt își schimbă semnul dacă se schimbă doi factori între ei. De exemplu, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$
2. Produsul mixt nu se schimbă dacă se efectuează permutări circulare ale factorilor: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.
3. Produsul mixt este liniar în fiecare din cei trei factori. De exemplu: $(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + \beta(\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$.
4. $(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ dacă și numai dacă $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$ sunt coplanari. Acest lucru rezultă din interpretarea geometrică a produsului mixt.

Produsul dublu vectorial

Folosind proprietățile operațiilor cu vectori, precum și formulele de calcul se pot demonstra numeroase identități. Unele dintre ele se folosesc foarte frecvent în alte discipline, de exemplu: matematici speciale, fizică sau mecanică.

Dintre aceste identități recomandăm să se demonstreze și să se rețină următoarele:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u};$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w};$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{t}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})\vec{w} - (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\vec{t};$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{t}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})\vec{v} - (\vec{v}, \vec{w}, \vec{t})\vec{u};$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{t}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{t}) - (\vec{u} \cdot \vec{t})(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{w} & \vec{u} \cdot \vec{t} \\ \vec{v} \cdot \vec{w} & \vec{v} \cdot \vec{t} \end{vmatrix}.$$

Prima identitate se verifică folosind coordonatele celor trei vectori într-o bază ortonormată și formulele corespunzătoare de calcul. Pe baza primei identități se demonstrează cu ușurință celelalte patru.

Primele două identități relevă faptul că produsul vectorial este o operație internă *neasociativă*. Pentru a reține aceste două identități observăm că: produsul dublu vectorial, în fiecare din cele două asocieri, este o combinație liniară de vectorii din paranteză; coeficienții combinației liniare sunt produsele scalare ale celorlalți doi vectori, începându-se cu produsul scalar dintre primul și ultimul vector.

Identitățile din a treia și a patra expresie exprimă faptul că același produs vectorial de produse vectoriale se poate scrie în două moduri: fie ca o combinație liniară de vectorii din prima paranteză, fie ca o combinație liniară de vectorii din a doua paranteză. Coeficienții sunt produsele mixte ale celorlalți trei vectori, începându-se cu produsul mixt al vectorilor extremi.

Ultima este cunoscută sub numele de *identitatea lui Lagrange*.

L.III.2.4 PROBLEME PROPUSE

PP.III.2.4.1 Să se demonstreze identitățile:

a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(a^2 + b^2);$

b) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 \cdot b^2$, unde $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt vectori din $\mathbb{R}^3$, iar $|\vec{a}| = a$ și $|\vec{b}| = b$.

c) Să se demonstreze identitatea lui Lagrange:

$$(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) \cdot (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 = (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2.$$

PP.III.2.4.2 Se dau vectorii: $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ și $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Să se calculeze $\text{pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

PP.III.2.4.3 Se dau vectorii $\vec{m}$ și $\vec{n}$, cu $m = 2, n = \sqrt{3}$ și $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Dacă $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ și $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, să se determine:

a) Unghiul $\angle(\vec{a}, \vec{b})$;

b) Lungimea diagonalelor și aria paralelogramului paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

PP.III.2.4.4 Se dau vectorii: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$ și $\vec{d} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.

a) Să se arate că $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari;

b) Să se stabilească ce fel de triedru formează vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$.

PP.III.2.4.5 Se dau vectorii: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$. Să se determine scalarul m astfel încât vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ să fie coplanari.

L.III.2.5 TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.III.2.5.1 Știind că $a=2, b=5$ și $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, să se afle pentru ce valoare a coeficientului α vectorii $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ și $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ sunt perpendiculari între ei.

TAev.III.2.5.2 Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$, știind că punctul său de aplicație se deplasează liniar între punctele $A(2, -3, 5)$ și $B(3, -2, -1)$.

TAev.III.2.5.3 Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii: $\vec{l} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{m} = -\vec{a} + \vec{b}$ și $\vec{n} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$, știind că volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este egal cu 3 unități.

TAev.III.2.5.4 Se dau vectorii: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$ și $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$. Să se calculeze:

- Volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori;
- Înălțimea paralelipipedului corespunzătoare bazei construită pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

TAev.III.2.5.5 Fie punctele: $A(1, -1, 2), B(2, 1, -1), C(3, -2, -1)$ și $D(1, 4, 2)$. Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$ și lungimea înălțimii coborâte din vârful B .

M.III TEMĂ DE CONTROL

TC.III.1 Dacă punctul M împarte segmentul M_1M_2 în raportul k , atunci vectorul său de poziție $\vec{r}$ se exprimă în funcție de vectorii de poziție ai punctelor M_1 și M_2 prin formula: $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + k\vec{r}_2}{1+k}$.

TC.III.2 Se dau punctele: $A(1, 1, 1), B(0, 2, 0), C(3, 2, 1), D(10, 4, 2)$ și $E(2, 5, 6)$.

- Să se cerceteze dacă vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AD}$ sunt coplanari;
- Să se descompună vectorul $\overrightarrow{DE}$ după vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AE}$.

TC.III.3 Se dau punctele: $A(12, -4, 3), B(3, 12, -4), C(2, 3, -4)$.

- Să se afle vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ și lungimile laturilor triunghiului ABC ;
- Să se arate că triunghiul AOC este dreptunghic;

- c) Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$;
d) Să se calculeze produsul vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$;
e) Să se afle aria triunghiului ABC ;
f) Să se afle lungimea înălțimii AA' a triunghiului ABC ;
g) Să se afle versorii bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC .

TC.III.4 Să se găsească un versor perpendicular pe planul determinat de punctele: $O(0,0,0), A(3,-2,3), B(2,1,1)$.

TC.III.5 Să se găsească un vector $\vec{x}$ perpendicular pe doi vectori dați, $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ și $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ și satisfăcând condiția: $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

TC.III.6 Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii:

a) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, știind că $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ sunt versori perpendiculari între ei;

b) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, știind că $m = \frac{1}{2}, n = 3$ și $\square(\vec{m}, \vec{n}) = 135^\circ$;

c) $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{b} = \vec{u} - \vec{w}$, $\vec{c} = \vec{v} + \vec{w}$, știind că $u = 1, v = 2, w = 3$ și $\square(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ, \square(\vec{u}, \vec{w}) = 60^\circ, \square(\vec{v}, \vec{w}) = 45^\circ$.

TC.III.7 Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trei vectori oarecare. Să se calculeze produsele mixte: $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a})$. Ce devin aceste produse mixte dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ devin versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

TC.III.8 Să se demonstreze că dacă vectorii $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ sunt coplanari, atunci ei sunt și coliniari.

TC.III.9 Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$;

b) $(\vec{u} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{u} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{a}) + (\vec{u} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{u}$.

TC.III.10 Să se demonstreze că, oricare ar fi vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, are loc relația:

$$\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} \right) = \frac{1}{4}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) .$$

Bibliografie

1. Udriște C., ș.a., *-Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
2. Flondor D., N. Donciu, *-Algebră și analiză matematică-culegere de probleme*, vol I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
3. Mânzatu E. – *Probleme de geometrie analitică*, Editura Academiei Militare, București, 1979.
4. Otlăcan E., *-Algebră superioară-îndrumar teoretic și culegere de probleme*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1995.
5. Mânzatu E., Gârban V. –*Algebră cu aplicații rezolvate la calculatorul electronic*, Editura Academiei Militare, București, 1982.