

MODULUL IV

SPAȚII VECTORIALE

Parcurgând acest modul, format din două lecții, veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definiția spațiului vectorial, exemple;
- Dependență și independență liniară, sistem de generatori ai unui spațiu vectorial;
- Bază, dimensiune, proprietăți ale bazei, coordonatele unui vector într-o bază dată;
- Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei, matricea de trecere de la o bază la alta;
- Subspații vectoriale, dimensiunea subspațiului generat de un sistem de vectori;
- Sume, intersecții și sume directe de subspații vectoriale;

Materialul prezentat are o logică matematică corectă, cu o înlănțuire firească a noțiunilor; de aceea se recomandă parcurgerea sa completă, în ordinea dată, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu trebuie să fie cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Vă recomandăm să vă constituiți un caiet de probleme și, pentru fiecare tip de exercițiu, să vă fixați algoritmul de rezolvare pe etape. Rezolvați cât mai complet problemele propuse și cele conținute în testul de autoevaluare.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 6 ore.

LECȚIA IV.1

NOȚIUNI FUNDAMENTALE REFERITOARE LA SPAȚIILE VECTORIALE

Parcurgând această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definiția spațiului vectorial, exemple;
- Dependență și independență liniară, sistem de generatori ai unui spațiu vectorial;
- Bază, dimensiune, proprietăți ale bazei, coordonatele unui vector într-o bază dată;
- Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei, matricea de trecere de la o bază la alta.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestei lecții este de 4 ore.

L.IV.1.1 Definiție, exemple

Definiție Reamintim că spațiu vectorial peste corpul comutativ K înseamnă o mulțime V care are două operații:

- Una *internă*, notată cu semnul $(+)$, care îndeplinește proprietățile grupului abelian.
- Alta *externă*, notată cu semnul $(\cdot)$, punct, care poate fi omis, având operatorii în corpul K . Această operație trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

$$1. \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

$$2. \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

$$3. \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

$$4. \quad 1x = x.$$

pentru orice $x, y \in V$ și orice $\alpha, \beta \in K$. Simbolul „1” din proprietatea 4) înseamnă elementul neutru al înmulțirii din corpul K .

Elementele din V se numesc *vectori*, iar cele din corpul K se numesc *scalari*. Pentru a nu fi nevoie să precizăm de fiecare dată care litere desemnează vectori și care litere desemnează scalari folosim următoarea convenție de notație: vectorii îi notăm cu litere latine, iar scalarii îi notăm cu litere grecești.

Exemple

1. $V = \mathcal{V}$ = spațiul vectorilor fizici, reprezentați de săgeți, corpul scalarilor fiind corpul R al numerelor reale. Operațiile și proprietățile acestora au fost definite, respectiv demonstrate, în capitolul “Calculul vectorial”.
2. $V = M(m, n; K)$ = mulțimea matricelor de tip (m, n) formate cu elemente din corpul comutativ K . Considerăm bine cunoscute operațiile de adunare a matricelor și de înmulțire a matricelor cu scalari, precum și proprietățile acestora, care definesc structura de spațiu vectorial.
3. $V = K^n = M(1, n; K)$ = mulțimea matricelor coloană, de lungime egală cu n . Este un caz particular remarcabil al spațiului $V = M(m, n; K)$.
4. $V = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ = mulțimea polinoamelor de n nedeterminate $X_1, X_2, \dots, X_n$ având coeficienții în corpul comutativ K . Adunarea polinoamelor și înmulțirea polinoamelor cu elemente din K (un caz particular de polinoame, anume cele de grad zero) îndeplinesc condițiile din definiția spațiului vectorial.
5. Obținem un șir de spații vectoriale luând $K = R$, iar în loc de V oricare din șirul descendent de mulțimi:

$$C_{[a,b]}^{(0)} \supset C_{[a,b]}^{(1)} \supset C_{[a,b]}^{(2)} \supset \dots \supset C_{[a,b]}^{(n)} \supset \dots \supset C_{[a,b]}^{(\infty)} \supset R[X] \supset \dots \supset R_n[X],$$

în care $C_{[a,b]}^{(n)}$ înseamnă mulțimea funcțiilor reale definite pe intervalul $[a, b]$ de n ori derivabile și cu derivate continue. Faptul că acestea sunt spații vectoriale are următoarea semnificație: adunând două funcții din $C_{[a,b]}^{(n)}$ sau înmulțind un număr real cu o funcție din $C_{[a,b]}^{(n)}$ se obține tot o funcție din $C_{[a,b]}^{(n)}$.

L.IV.1.2 Dependență liniară, bază, teorema dimensiunii

Vectori liniar independenți

Definiție

Vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ din spațiul vectorial V peste corpul K se numesc *liniar independenți* dacă îndeplinesc următoarea condiție:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

Evident că orice combinație liniară care are toți coeficienții nuli este egală cu vectorul nul. Condiția de liniar independență a unui sistem de vectori exprimă faptul că o combinație liniară a acestora nu poate fi nulă decât atunci când toți coeficienții combinației liniare sunt egali cu zero.

Dacă vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ nu sunt liniar independenți atunci ei se numesc *liniar dependenți*. Aceasta înseamnă că: *există* scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, *nu toți nuli*, astfel încât $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$.

Exemple

1. În spațiul ► orice sistem de trei vectori necoplanari, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sunt liniar independenți. Într-adevăr, dacă $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ și dacă, de exemplu, $\alpha \neq 0$, atunci am avea: $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}$ adică $\vec{u}$ s-ar afla în planul determinat de $\vec{v}$ și $\vec{w}$.

Pe de altă parte orice sistem de patru vectori: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$ sunt liniar dependenți. Într-adevăr, presupunând că $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sunt necoplanari, ei constituie o bază și deci $\vec{t}$ se poate scrie ca o combinație liniară de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$: $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, de unde rezultă $\vec{t} - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v} - \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Am găsit o combinație liniară nulă a vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$ în care nu toți coeficienții sunt nuli (coeficientul lui $\vec{t}$ este egal cu unu). Deci vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$ sunt liniar dependenți.

2. În spațiul vectorial $V = M(m, n; K)$ să considerăm matricele $E_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ unde E_{ij} înseamnă matricea în care elementul de pe linia i și coloana j este egal cu unu și toate celelalte elemente sunt egale cu zero. Numărul acestor matrice este, firește, egal cu m, n . O combinație liniară a lor înseamnă $\sum_{i,j} \alpha_{ij} E_{ij}$ care este tocmai matricea având pe linia i și coloana j elementul a_{ij} , altfel spus, matricea de element generic a_{ij} . Deci din $\sum_{i,j} \alpha_{ij} E_{ij} = \vec{0}$ rezultă că toate elementele matricei sunt nule, adică toți coeficienții combinației liniare sunt nuli.

3. În spațiul $V = K^n$ menționăm doar că notăm e_i în loc de E_{ii} :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. În spațiul $V = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ orice sistem de monoame este un sistem liniar independent: în fond, o combinație liniară de monoame înseamnă un polinom ai cărui coeficienți sunt tocmai coeficienții combinației liniare. Ori dacă un polinom este nul înseamnă că toți coeficienții săi sunt nuli.

În particular în spațiul $K[X]$ monoamele: $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$ sunt liniar independente.

Pe de altă parte polinoamele: $f_1 = 2 - 3X + 5X^2, f_2 = 1 + 2X, f_3 = -3 + X - 5X^2$ sunt liniar independente deoarece: $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

Sistem de generatori ai unui spațiu vectorial

Definiții

O submulțime V' a lui V se numește *subspațiu* dacă îndeplinește următoarea condiție: *orice combinație liniară de vectori din V' se află tot în V' .*

Este ușor de observat că dacă V' este subspațiu atunci este o parte stabilă față de operațiile spațiului și, cu operațiile induse, constituie un spațiu vectorial.

De exemplu, pentru un sistem de vectori notăm $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mulțimea combinațiilor liniare ale vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n$. Evident că această mulțime constituie un subspațiu. El se numește *subspațiul generat de vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$.*

Dacă subspațiul generat de vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ este egal cu întreg spațiul V atunci sistemul de vectori $x_1, x_2, \dots, x_n$ se numește *sistem de generatori ai spațiului V .* În acest caz spunem că spațiul V este *finit generat*.

Faptul că vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ constituie un sistem de generatori ai spațiului V se exprimă astfel: „Pentru orice $x \in V$ există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, astfel încât: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ ”.

Prin urmare faptul că $x_1, x_2, \dots, x_n$ constituie un sistem de generatori înseamnă că toți vectorii spațiului se exprimă ca niște combinații liniare ale acestora.

Exemple

1. Am demonstrat în capitolul 3 că dați fiind trei vectori necoplanari a, b, c , toți vectorii spațiului se exprimă ca niște combinații liniare ale acestora. Prin urmare orice sistem de trei vectori necoplanari constituie un sistem de generatori.

Pe de altă parte, dacă vectorii a, b, c sunt coplanari atunci ei nu constituie un sistem de generatori deoarece vectorii care nu sunt conținuți în planul vectorilor a, b, c nu pot fi combinații liniare de ei.

2. În spațiul $V = M(m, n; K)$ aceleași matrice E_{ij} care au servit mai înainte ca exemplu de sistem liniar independent constituie și un sistem de generatori. În fond, dacă $A = (\alpha_{ij})$, atunci $A = \sum_{i,j} \alpha_{ij} E_{ij}$. La fel, în spațiul $V = K^n$ matricele

coloană $e_1, e_2, \dots, e_n$ constituie un sistem de generatori.

3. În spațiul $V = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ monoamele constituie un sistem (infinit) de generatori. În fond orice polinom este o combinație liniară de monoame.

Baze ale unui spațiu vectorial. Coordonate

Definiție

Se numește *bază* a spațiului vectorial V un sistem de vectori $x_1, x_2, \dots, x_n$ care îndeplinește următoarele două condiții:

1. Sunt liniar independenți.
2. Constituie un sistem de generatori ai spațiului V .

A doua condiție asigură că orice vector se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n$: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Prima condiție asigură că în această scriere coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ai acestei combinații liniare sunt unic determinați de vectorul x . Într-adevăr, dacă am avea și $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$, atunci ar rezulta:

$x - x = 0 = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n$, iar din faptul că vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt liniar independenți deducem: $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$.

Așadar dacă vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ constituie o bază atunci *orice vector x se scrie în mod unic* ca o combinație liniară de vectorii bazei: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fiind unic determinați de vectorul x se numesc *coordonatele vectorului x în baza $x_1, x_2, \dots, x_n$* .

Exemple

1. Am arătat că în spațiul $\mathbb{R}^3$ orice sistem de trei vectori necoplanari constituie și un sistem liniar independent și un sistem de generatori. Deci ei constituie o bază. Mai precis, denumirea de bază pe care am atribuit-o, în capitolul 3, unui sistem de trei vectori necoplanari, corespunde cerințelor definiției pe care am formulat-o mai sus pentru noțiunea de bază.

2. În spațiul $V = M(m, n; K)$ matricele E_{ij} constituie atât un sistem de generatori cât și un sistem liniar independent, deci acest sistem de matrice constituie o bază. La fel, vectorii $e_1, e_2, \dots, e_n$ constituie o bază a spațiului K^n .

Coordonatele unui vector (deci ale unei *matrice*) în această bază sunt tocmai elementele care alcătuiesc matricea respectivă. La fel ca și în spațiul $\mathbb{R}^3$ ne așteptăm ca și în acest spațiu să existe mai multe baze. Printre ele, baza formată din matricele E_{ij} , având proprietatea pe care am menționat-o, se numește *baza canonică a spațiului*. În particular baza formată din vectorii $e_1, e_2, \dots, e_n$ se numește *baza canonică a spațiului $V = K^n$* .

3. În spațiul $V = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ monoamele constituie o bază. Coordonatele unui vector (deci ale unui polinom) în această bază sunt tocmai coeficienții polinomului. De aceea această bază se numește *baza canonică a spațiului $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$* .

Teorema dimensiunii

Dacă spațiul V are un sistem finit de generatori atunci oricare două baze ale spațiului au același număr de elemente.

Demonstrație. Fie $x_1, x_2, \dots, x_m$ și $y_1, y_2, \dots, y_n$ două baze ale spațiului V și presupunem, prin reducere la absurd, că $m \neq n$. Două situații sunt atunci posibile: sau $m < n$, sau $m > n$. Considerăm cazul când $m < n$. Cum vectorii $x_1, x_2, \dots, x_m$ constituie o bază, orice vector se poate scrie ca o combinație liniară de ei. În particular vectorii $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + ... + \alpha_{m1}x_m | \cdot \lambda_1 \\ y_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{m2}x_m | \cdot \lambda_2 \\ \\ y_n = \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_m | \cdot \lambda_n \end{array} \right.$$

Căutăm necunoscutele scalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ care să verifice *ecuația vectorială*:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = 0$$

Din egalitățile de mai sus combinația liniară $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n$ se poate exprima în funcție de $x_1, x_2, \dots, x_m$:

[illegible]

Ținând seama că vectorii $x_1, x_2, \dots, x_m$ sunt liniar independenți această ecuație vectorială este echivalentă cu un sistem de m ecuații scalare ce constau în anularea coeficienților vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_m$ din această combinație liniară:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots \alpha_{1n}\lambda_n = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \dots \alpha_{2n}\lambda_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\lambda_1 + \alpha_{m2}\lambda_2 + \dots \alpha_{mn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Acest sistem este omogen și are m ecuații și n necunoscute. Rangul matricei coeficienților nu poate să depășească numărul m al liniilor.

Pe de altă parte ipoteza de reducere la absurd prevede că $m < n$. Conform teoremei Kronecker –Capelli sistemul este nedeterminat, deci admite cel puțin o soluție nebanală. Deci există un sistem de scalari $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0$ nu toți nuli, care

verifică ecuațiile sistemului, care sistem este echivalent cu ecuația vectorială:
 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \dots, \lambda_n y_n = 0$.

Dar aceasta înseamnă că vectorii $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt liniar dependenți, ceea ce contrazice faptul că ei formează o bază. Deci ipoteza că $m < n$ este falsă. În mod analog se respinge și ipoteza $m > n$. Q.E.D.

Observatii

1. Din această teoremă rezultă că numărul vectorilor unei baze reprezintă o caracteristică a spațiului. Acest lucru dă consistență următoarei definiții:

Se numește *dimensiunea spațiului* V numărul vectorilor unei baze din V .

În spațiul $\mathfrak{P}$, subspațiile $\mathfrak{P}_d$ și $\mathfrak{P}_\pi$ au fost numite subspații de dimensiune unu respectiv doi. Observăm că această denumire corespunde sensului noțiunii de dimensiune precizat mai sus.

L.IV.1.3 Formula de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei

Forma matriceală

Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K și două baze ale acestui spațiu: $x_1, x_2, \dots, x_n$ și $y_1, y_2, \dots, y_n$. Orice vector x al spațiului va avea unele coordonate în prima bază și alte coordonate în a doua bază.

$$x = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \dots + \zeta_n x_n$$

$$x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \dots + \eta_n y_n$$

Ne propunem să stabilim formule care să permită calculul coordonatelor η în funcție de coordonatele ξ și invers, a coordonatelor ξ în funcție de coordonatele η .

În acest scop să scriem vectorii $y_1, y_2, \dots, y_n$ în funcție de vectorii bazei $x_1, x_2, \dots, x_n$.

[illegible]

Coeficientii acestor combinații liniare formează o matrice pătratică:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

care se numește *matricea de trecere de la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ la baza $y_1, y_2, \dots, y_n$* . După cum se observă, această matrice se alcătuiește plasând pe coloane coordonatele vectorilor $y_1, y_2, \dots, y_n$ în baza $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Relațiile care exprimă vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ ca niște combinații liniare de $y_1, y_2, \dots, y_n$ se pot scrie sub formă matriceală astfel:

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot T$$

În această relație, în membrul drept se înmulțește o matrice linie formată din vectori cu o matrice pătratică formată din scalar. Înmulțirea se face folosind operația externă, de înmulțire a scalarilor cu vectori.

Notând cu S matricea de trecere de la baza $y_1, y_2, \dots, y_n$ înapoi la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ ea va îndeplini relația corespunzătoare:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot S$$

Folosind ultimele două relații se obține:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot S = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot T \cdot S$$

adică matricea produs $T \cdot S$ joacă rolul matricei de trecere de la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ la ea însăși. Dar această matrice nu poate fi decât matricea unitate, din cauza unicității scrierii vectorilor ca niște combinații liniare a vectorilor unei baze, în acest caz baza $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Așadar, $T \cdot S = I_n$ de unde rezultă că *matricea T este inversabilă și matricea de trecere S este tocmai inversa matricei T : $S = T^{-1}$* . Relațiile:

$$x = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \dots + \zeta_n x_n; \quad x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \dots + \eta_n y_n,$$

se pot scrie și ele sub formă matriceală astfel:

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}; \quad x = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în a doua relație matricea linie $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ în funcție de matricea linie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obținem:

$$x = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

adică:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \text{ de unde: } \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

În concluzie: dacă T este matricea de trecere de la baza $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la baza nouă $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, atunci ea este inversabilă și matricea de trecere de la baza nouă la baza veche este T^{-1} . Matricea de trecere de la coordonatele vechi, ξ , la coordonatele noi, η , este T^{-1} iar matricea de trecere de la coordonatele noi, η , la coordonatele vechi, ξ , este T .

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2, \dots, x_n) & \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} & \\ T \downarrow \quad \uparrow T^{-1} & T^{-1} \downarrow \quad \uparrow T & \\ (y_1, y_2, \dots, y_n) & \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} & \end{array}$$

După cum se observă, în relațiile matriceale deduse, vectorii bazei se plasează într-o matrice linie, iar coordonatele se plasează într-o matrice coloană:

$$\begin{aligned} (y_1 y_2 \dots y_n) &= (x_1 x_2 \dots x_n) \cdot T & \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \\ (x_1 x_2 \dots x_n) &= (y_1 y_2 \dots y_n) \cdot T^{-1} & \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forma matriceală a formulelor este sintetică și înlesnește efortul de reținere a lor. Această formă are însă dezavantajul că nu exprimă nemijlocit vectorii bazelor și coordonatele vectorilor prin intermediul matricelor și a operației de înmulțire a matricelor. Forma concentrată care va fi prezentată în continuare încearcă să rezolve acest neajuns.

Forma concentrată a lui Einstein

Pornim de la următoarea convenție de notație: *în elementul generic al unei matrice indicele liniei îl plasăm sus, iar indicele coloanei îl plasăm jos.*

De exemplu, în matricea linie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ notația elementelor corespunde acestei convenții: indicele reprezintă coloana și este plasat jos.

Dar în matricea coloană,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

notarea elementelor nu corespunde acestei convenții deoarece indicele reprezintă linia și deci ar trebui să fie plasat sus. Prin urmare vom schimba modul de scriere a coordonatelor plasând indicii sus: $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$.

În ce privește matricea T , elementul generic al acesteia îl vom nota α_j^i în care, repetăm, indicele superior, i , reprezintă linia, iar indicele inferior, j , reprezintă coloana. De exemplu, α_3^4 reprezintă elementul de pe linia patru și coloana trei din matricea T . Să mai notăm cu β_j^i elementul generic al matricei T^{-1} .

Cu aceste modificări ale notațiilor cele patru formule, de transformare a vectorilor bazelor și de transformare a coordonatelor, se scriu astfel:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j x_j; \quad \eta^i = \sum_{j=1}^n \beta_j^i \xi^j;$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n \beta_i^j y_j; \quad \xi^i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \eta^j.$$

În sfârșit în aceste formule, suprimăm semnul de sumare, înlocuindu-l prin convenția: *dacă se repetă un indice, unul superior și celălalt inferior, atunci se subînțelege sumarea după acel indice luând valori de la 1 la n*. Formulele devin:

$$y_i = \alpha_i^j x_j; \quad \eta^i = \beta_j^i \xi^j;$$

$$x_i = \beta_i^j y_j; \quad \xi^i = \alpha_j^i \eta^j.$$

L.IV.1.4 Proprietăți ale bazei

Propoziția 1

Orice sistem liniar independent de vectori $v_1, v_2, \dots, v_r$ din spațiul vectorial finit generat V se poate completa până la o bază a spațiului.

Demonstrație

Vom construi o bază care conține vectorii $v_1, v_2, \dots, v_r$.

Spațiul V fiind finit generat, el admite o bază finită $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Considerăm, în prima etapă, sistemul de vectori $v_1, v_2, \dots, v_r, x_1$. Dacă acest sistem este liniar independent atunci se ia în a doua etapă sistemul $v_1, v_2, \dots, v_r, x_1, x_2$, adică se reține vectorul x_1 . Dacă este liniar dependent atunci, în a doua etapă se consideră sistemul $v_1, v_2, \dots, v_r, x_2$ adică nu se reține vectorul x_1 .

În etapa a treia, în fiecare din cele două cazuri, adăugăm vectorul x_3 după ce s-a reținut sau s-a exclus vectorul x_2 . Vectorul x_2 se reține sau nu după cum sistemul (având ca ultim vector pe x_2) este liniar independent sau liniar dependent.

În etapa $n + 1$, ultimul vector adăugat fiind x_n , acesta se reține sau nu, după aceeași regulă ca și în etapele doi și trei. S-a obținut astfel un sistem de vectori:

$$v_1, v_2, \dots, v_r, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$$

despre care vom arăta că îndeplinește cele două condiții din definiția bazei.

Din construcție sistemul este liniar independent: nu s-ar fi reținut vectorul x_{i_s} dacă sistemul ar fi liniar dependent.

Să revenim acum la etapa întâia și să considerăm cazul când $v_1, v_2, \dots, v_r, x_1$ este liniar dependent, deci atunci când x_1 nu se reține în șir. Înseamnă că există scalarii: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ și β , nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \beta x_1 = 0$. În mod sigur $\beta \neq 0$ deoarece dacă $\beta = 0$ atunci am avea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = 0$, de unde ar rezulta că toți ceilalți coeficienți α sunt nuli. Rezultă:

$$x_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - \dots - \frac{\alpha_r}{\beta} v_r$$

adică *dintre vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ cei care nu se rețin în șirul $v_1, v_2, \dots, v_r, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ se pot scrie ca niște combinații liniare de vectorii deja reținuți.*

Vom arăta acum că orice vector x se scrie ca o combinație liniară de vectorii $v_1, v_2, \dots, v_r, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$. În primul rând x se poate scrie ca o combinație liniară de vectorii bazei $x_1, x_2, \dots, x_n$: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Împărțim suma din membrul drept în două părți: o parte cuprinzând termenii care conțin acei vectori x_i care au fost reținuți în șirul $v_1, v_2, \dots, v_r, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ și altă parte cu acei x_i care nu au fost reținuți în șir:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^s \alpha_{i_k} x_{i_k} + \sum_{j \neq i_1, i_2, \dots, i_s} \alpha_j x_j$$

În suma a doua, toți vectorii x_j , fiind cei care nu au fost reținuți în șirul $v_1, v_2, \dots, v_r, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$, se pot scrie, așa cum am stabilit, ca niște combinații liniare de vectorii din acest șir. Făcând înlocuirile și reducerile de termeni asemenea se obține o combinație liniară de $v_1, v_2, \dots, v_r, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$. Q.E.D.

Observație

Din propoziția demonstrată mai sus rezultă că o bază a unui spațiu vectorial se poate caracteriza ca un sistem liniar independent *maximal* (adică un sistem liniar independent care nu este *strict* conținut în alt sistem liniar independent).

Într-adevăr, fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ o bază și să presupunem că există vectorul v astfel că sistemul $x_1, x_2, \dots, x_n, v$ este liniar independent. Rezultă, conform propoziției 1 că există o bază care conține acești vectori. Această bază ar avea $n+1$ vectori, ceea ce contrazice teorema dimensiunii, deoarece în spațiul V există deja baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ care are n vectori.

Prin urmare *o bază este un sistem liniar independent căruia dacă-i mai adăugăm un vector, sistemul își pierde calitatea de liniar independentă.*

Criteriu

Dacă numărul vectorilor unui sistem liniar independent este egal cu dimensiunea spațiului atunci acel sistem de vectori constituie o bază.

Într-adevăr, fie n dimensiunea spațiului și fie $v_1, v_2, \dots, v_n$ un sistem liniar independent. Conform propoziției 1, există o bază care conține vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$. Respectiva bază nu poate să mai conțină alți vectori în afară de $v_1, v_2, \dots, v_n$ deoarece numărul lor ar întrece dimensiunea spațiului.

Propoziția 2

Din orice sistem de generatori ai unui spațiu vectorial V se poate extrage o bază.

Demonstrație

Fie $v_1, v_2, \dots, v_m$ un sistem de generatori ai spațiului V . Avem de demonstrat că o parte a acestor vectori formează o bază.

Două situații sunt posibile: sau sistemul este liniar independent, sau este liniar dependent. Dacă este liniar dependent atunci el constituie o bază, și deci demonstrația propoziției este încheiată.

Dacă sistemul este liniar independent atunci există niște scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, nu toți nuli, astfel încât: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$.

Renumerotând eventual vectorii putem presupune că $\alpha_m \neq 0$. Se poate atunci scrie:

$$v_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_m} v_2 - \dots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} v_{m-1},$$

ceea ce înseamnă că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$ constituie un sistem de generatori.

Acestui nou sistem de generatori i se aplică același tratament ca sistemului inițial, ducând, fie la găsirea unei baze, deci la încheierea demonstrației, fie la eliminarea unui vector din sistemul de generatori.

Dat fiind că numărul vectorilor sistemului inițial este finit, rezultă că după un număr finit de pași se ajunge la o bază. Q.E.D.

Observație

O bază se poate caracteriza ca un *sistem minimal de generatori*, adică un sistem de generatori din care dacă se exclude un vector, noul sistem de vectori nu mai are calitatea de sistem de generatori.

Într-adevăr, fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ o bază și presupunem, prin reducere la absurd, că suprimând unul dintre vectorii bazei, noul sistem ar fi încă sistem de generatori. Pentru a fixa ideile, renumerotând eventual vectorii bazei putem presupune că vectorul suprimat este chiar x_n . Propoziția 2 ne asigură că din sistemul de vectori $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ se poate extrage o bază. Această bază ar avea

cel mult $n-1$ vectori. Am ajuns la o contradicție cu teorema dimensiunii deoarece în spațiul V există o bază cu n vectori: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Criteriu

Dacă numărul vectorilor unui sistem de generatori este egal cu dimensiunea spațiului, atunci acel sistem de generatori constituie o bază.

Într-adevăr, conform propoziției 2, din acest sistem de generatori se poate extrage o bază. Dar dacă prin aceasta s-ar suprima cel puțin un vector s-ar ajunge la o bază care ar avea mai puțini vectori decât dimensiunea spațiului, ceea ce este absurd.

L.IV.1.5 PROBLEME PROPUSE

PP.IV.1.5.1 Fie V un spațiu vectorial peste corpul K și S o mulțime nevidă. Definim $F = \{f | f: S \rightarrow V\}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\forall) f, g \in F$, $(tf)(x) = tf(x)$, $(\forall) t \in K, (\forall) x \in S$. Să se arate că F este spațiu vectorial peste K .

PP.IV.1.5.2 Fie $V = \{x | x \in \square, x > 0\}$. Pentru $(\forall) x, y \in V$ și $(\forall) s \in \square$, definim $x \oplus y = xy$, $s \square x = x^s$. Să se arate că $(V, \oplus, \square)$ este spațiu vectorial peste $\square$.

PP.IV.1.5.3 Să se arate că vectorii următori sunt liniar independenți în $\square^3$:

a) $v_1 = (0, 2, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 3, 5)$;

b) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (0, 1, -1)$.

PP.IV.1.5.4 Arătați că următoarele familii de vectori sunt baze ale spațiului vectorial $\square^3$:

a) $v_1 = (2, 2, -1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, -1, 0)$;

b) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (0, 1, -1)$;

PP.IV.1.5.5 Arătați că vectorii următori formează o bază pentru $\square^4$ și determinați coordonatele vectorului $v = (2, 1, 3, 4)$ în această bază:

$$v_1 = (2, 3, 4, 1), v_2 = (3, -1, 1, -2), v_3 = (-1, 2, -3, 4), v_4 = (5, -7, 6, -7).$$

PP.IV.1.5.6 Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor când se trece de la o bază $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, la alta, $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$, în spațiile vectoriale menționate, unde:

1) $v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (0, 1, 1)$,

$$v'_1 = (1, -1, 1), v'_2 = (0, 1, -1), v'_3 = (1, 1, 0), \text{ în } \square^3;$$

2) $v_1 = 1, v_2 = t, v_3 = t^2$

$v'_1 = 1-t, v'_2 = 1+t^2, v'_3 = t^2-t$, în spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult 2.

L.IV.1.6 TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.IV.1.6.1 Să se arate că mulțimea $M_{m \times n}(K)$ a matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) este spațiu vectorial peste corpul K în raport cu adunarea matricelor și cu înmulțirea dintre un element din K și o matrice. Să se arate că matricele:

$$E_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 0 & . & . & . & 1 & . & . & . & 0 \end{matrix} & i \\ \begin{matrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & . \end{matrix} & j \end{matrix}$$

constituie o bază a lui $M_{m \times n}(K)$ și că $\dim M_{m \times n}(K) = mn$.

TAev.IV.1.6.2 Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n și $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și $B'' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, trei baze diferite ale sale. Fie $S = (s_{ij})$ matricea de trecere de la baza B' la baza B și $T = (t_{ij})$ matricea de trecere de la baza B'' la baza B' . Să se arate că $S \cdot T$ este matricea de trecere de la baza B'' la baza B .

TAev.IV.1.6.3 Fie în $\mathbb{R}^4$ familiile de vectori $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ și $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, unde:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, -1, 0), v_2 = (1, -1, 1, 1), v_3 = (-1, 2, 1, 1), v_4 = (-1, -1, 0, 1) \text{ și} \\ u_1 &= (2, 1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 2, 2), u_3 = (-2, 1, 1, 2), u_4 = (1, 3, 1, 2). \end{aligned}$$

Să se arate că fiecare familie este o bază pentru $\mathbb{R}^4$ și să se determine coordonatele vectorului $w = (2, 1, -1, 3)$ în fiecare bază. Să se determine matricea de trecere de la baza $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la baza $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ și să se verifice coordonatele lui w în cele două baze cu ajutorul matricei de trecere.

TAev.IV.1.6.4 Fie $\mathbb{R}_3[X]$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult 3, în nedeterminata X . Arătați că fiecare din sistemele de polinoame:

- a) $B = \{1, X, X^2, X^3\}$;
- b) $B' = \{1 + X^2, X + X^2, X^2, X^3 + X^2\}$;
- c) $B'' = \left\{1, \frac{(X-1)}{1!}, \frac{(X-1)^2}{2!}, \frac{(X-1)^3}{3!}\right\}$;

este o bază pentru $\mathbb{C}_3[X]$. Să se reprezinte polinomul $f = X^3 - X^2 - X + 1$ ca o combinație liniară cu coeficienți reali în fiecare dintre cele trei baze. Să se determine matricea de trecere între fiecare două dintre cele trei baze.

TAev.IV.1.6.5 Fie vectorii $v_1 = (1-i, 0, 2i)$, $v_2 = (i, 1, 0)$, $v_3 = (2-i, 1, i)$ din $\mathbb{C}^3$. Să se calculeze: $w_1 = (1+2i)[(2+i)(3v_1 + iv_2) + (1-i)(2iv_1 - 3v_2)]$ și $w_2 = 2v_1 - (1+i)v_2 + 3iv_3$. Să se rezolve ecuația în x : $2v_1 - ix = (1-i)v_2$.

TAev.IV.1.6.6 Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Să se arate că dacă vectorii $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt liniar independenți, atunci și vectorii $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ sunt liniar independenți.

SUBSPAȚII VECTORIALE. OPERAȚII CU SUBSPAȚII VECTORIALE

- Subspații vectoriale, dimensiunea subspațiului generat de un sistem de vectori;
- Sume, intersecții și sume directe de subspații vectoriale;

L.IV.2.1 Subspațiul vectorial generat de un sistem de vectori

Considerăm o bază $x_1, x_2, \dots, x_n$ în spațiul vectorial V și $v_1, v_2, \dots, v_m$ un sistem oarecare de vectori, despre care nu se presupune nici că este liniar dependent nici sistem de generatori. Ei se scriu, firește, ca niște combinații liniare de vectorii bazei:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \dots + \alpha_{n1}x_n \\ v_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{n2}x_n \\ \vdots \\ v_m = \alpha_{1m}x_1 + \alpha_{2m}x_2 + \dots + \alpha_{nm}x_n \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

94

vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_m$. Între acest subspațiu și matricea A există următoarea legătură:

Teoremă

$$\dim[v_1, v_2, \dots, v_m] = \text{rang}(A).$$

Demonstrație.

Fie $r = \dim[v_1, v_2, \dots, v_m]$. Înseamnă că orice bază a subspațiului $[v_1, v_2, \dots, v_m]$ are r vectori. Ne propunem să demonstrăm că $\text{rang}(A) = r$.

Aşa cum am spus vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$ nu constituie un sistem de generatori ai spaţiului V . Dar ei constituie, bineînţeles, un sistem de generatori pentru subspaţiul generat de ei, adică $[v_1, v_2, \dots, v_m]$. Conform Propoziţiei 2, din acest sistem de generatori se poate alege o bază a subspaţiului $[v_1, v_2, \dots, v_m]$ formată, aşa cum am spus, din r vectori.

Renumerotând vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$, putem presupune că vectorii bazei sunt chiar primii r vectori: $v_1, v_2, \dots, v_r$. Renumerotarea vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_m$ modifică matricea A în sensul schimbării ordinii coloanelor ei. Dar aceasta nu modifică rangul matricei A .

Pentru a demonstra că $\text{rang}(A) = r$, vom verifica cele două condiții din definiția rangului.

Deoarece vectorii $v_1, v_2, \dots, v_r$ sunt liniar independenți (ei constituind o bază) rezultă că ecuația vectorială

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

în necunoscutele scalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ are numai soluția banală: $\lambda_1 = 0$,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_r = 0$$

Înlocuind în această ecuație vectorială pe $v_1, v_2, \dots, v_r$ prin combinații liniare de $x_1, x_2, \dots, x_n$ ecuația devine:

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots + \alpha_{1r}\lambda_r)x_1 + \\ & (\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \dots + \alpha_{2r}\lambda_r)x_2 + \\ & \dots\dots\dots \\ & (\alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \dots + \alpha_{nr}\lambda_r)x_n = \theta \end{aligned}$$

Vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ fiind liniar independenți, ca vectori ai unei baze, ecuația vectorială scrisă sub această formă este echivalentă cu următorul sistem de n ecuații scalare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + ... + \alpha_{1r}\lambda_r = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + ... + \alpha_{2r}\lambda_r = 0 \\ \\ \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + ... + \alpha_{nr}\lambda_r = 0 \end{array} \right.$$

Acest sistem linear și omogen este echivalent cu ecuația vectorială, deci are numai soluția banală. Deci este un sistem determinat.

Conform teoremei Kronecker-Capelli rangul matricei coeficienților este egal cu numărul necunoscutelor, adică r . Înseamnă că matricea coeficienților are un minor de ordinul r nenul. Dar matricea coeficienților sistemului este blocul matricei A format cu primele r coloane. Așadar matricea A are un minor de ordinul r nenul și astfel prima condiție din definiția rangului este îndeplinită.

Rămâne de demonstrat condiția a doua: că orice minor de ordinul $r + 1$ este nul. Fie M_{r+1} un astfel de minor și să notăm $j_1, j_2, \dots, j_{r+1}$ coloanele din matricea A , ce definesc acest minor.

Vectorii $j_1, j_2, \dots, j_{r+1}$ sunt liniar dependenți, deoarece sunt în număr de $r + 1$ și $\dim[v_1, v_2, \dots, v_m] = r$. Deci ecuația vectorială:

$$\lambda_1 v_{j_1} + \lambda_2 v_{j_2} + \dots + \lambda_{r+1} v_{j_{r+1}} = \theta$$

în necunoscutele scalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ are cel puțin o soluție nebanală.

Înlocuind în această ecuație vectorială vectorii $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{r+1}}$ prin combinațiile lor liniare de $x_1, x_2, \dots, x_n$ ecuația devine:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{1j_1}\lambda_1 + \alpha_{1j_2}\lambda_2 + ... + \alpha_{1j_{r+1}}\lambda_{r+1})x_1 + \\ (\alpha_{2j_1}\lambda_1 + \alpha_{2j_2}\lambda_2 + ... + \alpha_{2j_{r+1}}\lambda_{r+1})x_2 + \\ \\ (\alpha_{nj_1}\lambda_1 + \alpha_{nj_2}\lambda_2 + ... + \alpha_{nj_{r+1}}\lambda_{r+1})x_n = \theta \end{array} \right.$$

Folosind iarăși liniar independența vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n$ deducem că această ecuație vectorială este echivalentă cu sistemul de n ecuații scalare ce constau în anularea celor n coeficienți ai vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1j} \lambda_1 + \alpha_{1j_2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{1j_{r+1}} \lambda_{r+1} = 0 \\ \alpha_{2j_1} \lambda_1 + \alpha_{2j_2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{2j_{r+1}} \lambda_{r+1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{nj_1} \lambda_1 + \alpha_{nj_2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{nj_{r+1}} \lambda_{r+1} = 0 \end{array} \right.$$

Acest sistem omogen este echivalent cu ecuația vectorială care, așa cum am spus, are soluții nebanale. Înseamnă că rangul matricei coeficienților este

strict mai mic decât numărul necunoscutelor, care este $r + 1$. Deci toți minorii de ordin $r + 1$ ai acestei matrice sunt nuli.

Dar această matrice este alcătuită din coloanele $j_1, j_2, \dots, j_{r+1}$ ale matricei A . Rezultă că toți minorii de ordin $r + 1$ ai matricei A , definiți de aceste coloane sunt nuli. În particular este nul și minorul M_{r+1} pe care l-am considerat mai sus. Q.E.D.

Criteriu

Dacă rangul matricei coeficienților unui sistem de vectori este egal cu numărul vectorilor atunci vectorii sunt liniar independenți.

Într-adevăr, potrivit teoremei, rangul acestei matrice este egal cu dimensiunea subspațiului generat de vectori. Ori, dacă dimensiunea este egală cu numărul generatorilor înseamnă că acești generatori constituie o bază, deci sunt liniar independenți

L.IV.2.2 Sume și intersecții de subspații. Sume directe

Suma subspațiilor

Fie V_1 și V_2 două subspații ale spațiului vectorial V peste un corp comutativ K . Numim *suma* celor două subspații submulțimea:

$$V_1 + V_2 = \{x = x_1 + x_2; x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}.$$

Este ușor de verificat că această submulțime verifică următoarele proprietăți:

- este subspațiu;
- este cel mai mic subspațiu care conține V_1 și V_2 în sensul că orice subspațiu care conține V_1 și V_2 conține și subspațiul $V_1 + V_2$. Din acest motiv el se mai numește și *subspațiul generat de V_1 și V_2* .

Se poate spune că în acest fel am definit o operație internă în mulțimea $S(V)$ a subspațiilor lui V , operația de adunare a subspațiilor. Această operație are următoarele proprietăți, care se verifică fără dificultate:

- comutativitatea: $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$;
- asociativitatea: $(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 (V_2 + V_3)$;
- elementul de efect nul: subspațiul $\{0\}$.

Menționăm că aceste proprietăți definesc structura de *monoid comutativ*.

Asociativitatea dă sens sumei a trei sau mai multe spații, care se putea defini și direct:

$$\sum_{i=1}^n V_i = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i; x_i \in V_i \right\}.$$

Putem considera suma unei familii oarecare de subspații, $(V_i)_{i \in I}$, în care mulțimea I este infinită:

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\{ x = \sum_{i \in I} x_i; x_i \in V_i \right\},$$

cu precizarea că în suma care-l definește pe x numai un număr finit de termeni diferă de vectorul nul, θ .

Intersecția subspațiilor

Operația duală operației de adunare a subspațiilor, în sensul relației de incluziune, este operația de intersecție:

$$V_1 \cap V_2 = \{x; x \in V_1, x \in V_2\}.$$

Este ușor de verificat că intersecția este o operație internă pe mulțimea $S(V)$ a subspațiilor lui V și că această operație satisface proprietățile monoidului comutativ, elementul de efect nul fiind spațiul total V .

Intersecția este operația duală sumei față de relația de incluziune a subspațiilor în sensul că, pe când suma subspațiilor V_1 și V_2 este *cel mai mic dintre subspațiile care conțin și pe V_1 și pe V_2* intersecția $V_1 \cap V_2$ este *cel mai mare dintre subspațiile conținute deopotrivă și în V_1 și în V_2* . Orice subspațiu care este conținut și în V_1 și în V_2 este conținut în $V_1 \cap V_2$.

Asociativitatea intersecției dă sens intersecției a trei sau mai multe elemente. Dar se poate defini și direct intersecția unei familii oarecare, finite sau infinite, de subspații:

$$\bigcap_{i \in I} V_i = \{x \in V; \forall i \in I, x \in V_i\}$$

Sume directe de subspații

Suma familiei de subspații $(V_i)_{i \in I}$ se zice *directă* dacă este îndeplinită următoarea condiție: $\forall i \in I, V_i \cap \sum_{j \in I, j \neq i} V_j = \{\theta\}$.

În cazul a două subspații, V_1 și V_2 suma lor este directă dacă $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. În cazul a trei subspații, V_1 , V_2 și V_3 , suma lor este directă dacă fiecare din ele are în comun cu suma celorlalte două numai vectorul nul:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{\theta\}, \quad V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{\theta\}, \quad V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{\theta\}.$$

După cum se vede, suma directă nu este o altă sumă decât suma definită mai înainte. Relația dintre subspații decide dacă suma lor este sau nu directă, așa cum se vede destul de clar în cazul a două subspații.

Exemple

I. În spațiul $\blacktriangle$ al vectorilor reprezentați de săgeți (vezi Capitolul „Calculul vectorial”) pentru orice vector v subspațiul generat de v , notat $[v]$, este alcătuit din vectorii situați pe aceeași dreaptă cu v .

Dați fiind doi vectori necolineari, v_1 și v_2 suma subspațiilor $[v_1] + [v_2]$ este planul determinat de cei doi vectori și această sumă este directă, deoarece dreptele suport ale celor doi vectori au în comun numai vectorul nul, θ .

Dacă v_1, v_2 și v_3 sunt coplanari, dar doi câte doi necolineari, atunci suma lor, $[v_1] + [v_2] + [v_3]$ este planul pe care-l determină. Suma nu este directă deoarece, de exemplu, $[v_1]$ se află în întregime în subspațiul $[v_2] + [v_3]$ care este planul determinat de cei trei vectori. Cu toate acestea, așa cum am văzut mai sus, suma a oricare două dintre ele este directă.

Dacă v_1, v_2 și v_3 sunt necoplanari, atunci suma subspațiilor $[v_1] + [v_2] + [v_3]$ este directă. La fel este directă suma dintre fiecare din subspațiile $[v_1], [v_2], [v_3]$ și subspațiul generat de ceilalți doi vectori.

II. Fie V un spațiu finit generat și $x_1, x_2, \dots, x_n$ o bază în acest subspațiu. Suma subspațiilor: $[v_1], [v_2], \dots, [v_3]$ este directă. Într-adevăr, pentru fiecare indice i , vectorii din subspațiul $[x_i]$ sunt de forma $x = \alpha_i x_i$, iar cei din subspațiul $\sum_{j \neq i} [x_j]$ sunt de forma $x = \sum_{j \neq i} \alpha_j x_j$. Un vector comun x al celor două subspații ar implica egalitatea: $\sum_{j \neq i} \alpha_j x_j = \alpha_i x_i$ sau, $\sum_{j \neq i} \alpha_j x_j - \alpha_i x_i = \theta$. Din liniar independența vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n$ rezultă că toți coeficienții combinației liniare din membrul stâng sunt nuli, în particular $\alpha_i = 0$, adică vectorul comun $x = \alpha_i x_i = \theta$.

Dimensiunea sumei de subspații

O proprietate importantă a sumei directe este că se poate alcătui o bază a sumei directe de subspații punând la un loc vectorii bazelor subspațiilor. Acest fapt urmează să-l stabilim în cele ce urmează.

Lemă

Suma de subspații $\sum_{i=1}^n V_i$ este directă dacă și numai dacă: din $\sum_{i=1}^n x_i = \theta$; $x_i \in V_i$ rezultă $x_i = \theta$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstrație

Presupunem că suma $\sum_{i=1}^n V_i$ este directă și că este îndeplinită relația:

$\sum_{i=1}^n x_i = \theta$; $x_i \in V_i$. Rezultă că pentru orice i , $x_i = -\sum_{j \neq i} x_j$. Pe de altă parte, din definiția sumei directe, oricare ar fi i , $V_i \cap \sum_{j \in I, j \neq i} V_j = \{\theta\}$. Cum $x_i \in V_i$ și $-\sum_{j \neq i} x_j \in \sum_{j \neq i} V_j$, egalitatea lor conduce la $x_i = \theta$.

Reciproc, presupunem că din relația $\sum_{i=1}^n x_i = \theta$ cu $x_i \in V_i$ rezultă $x_i = \theta$,

pentru orice i și ne propunem să demonstrăm că suma $\sum_{i=1}^n V_i$ este directă. Orice

vector x care se află în $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\theta\}$ va fi pe de o parte de forma $x = x_i \in V_i$

iar pe de altă parte de forma $x = \sum_{j \neq i} x_j \in \sum_{j \neq i} V_j$. Scăzând cele două egalități

obținem: $\sum_{j \neq i} x_j - x_i = \theta$. Rezultă $x_i = \theta$, și deci $x = \theta$. Q.E.D.

Menționăm următoarea consecință: orice vector x al unei sume directe

$\sum_{i=1}^n V_i$ se scrie în mod unic sub forma $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

Într-adevăr, dacă $x = \sum_{i=1}^n x'_i$ atunci: $x - x = \theta = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)$ și din lema

anterioară rezultă $x_i - x'_i = \theta$ pentru orice i .

Propoziție

Fie $\sum_{i=1}^r V_i$ o sumă directă de subspații și presupunem că avem câte o bază

în fiecare din subspații. Atunci, punând la un loc vectorii bazelor celor r subspații se obține o bază a subspațiului sumă.

Demonstrație

Fie $x_1, x_2, \dots, x_m$ o bază în V_1 ; $y_1, y_2, \dots, y_n$ o bază în V_2 ; $\dots$; $z_1, z_2, \dots, z_p$ o bază în V_r . Din definiția sumei de subspații rezultă că: $x_1, x_2, \dots, x_m,$

$y_1, y_2, y_n, \dots, z_1, z_2, \dots, z_p$, constituie un sistem de generatori pentru $V_1 + V_2 + \dots + V_r$.

Rămâne de demonstrat liniar independența lor.

Dacă:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m) + (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n) + \dots + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_p z_p) = \theta$$

atunci, din lema demonstrată, sumele din toate parantezele sunt nule deoarece prima paranteză este un vector din V_1 , a doua un vector din V_2 , ș.a.m.d.

Din $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta$ și din liniar independența vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_m$ rezultă că toți coeficienții α sunt nuli.

Analog se deduce că și coeficienții β și toți ceilalți sunt nuli. Q.E.D.

Consecință

Dacă suma $\sum_{i=1}^r V_i$ este directă atunci $\dim \sum_{i=1}^r V_i = \sum_{i=1}^r \dim V_i$.

Propoziție

Pentru orice pereche de subspații V_1 și V_2 avem:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Demonstrație

Fie $x_1, x_2, \dots, x_r$ o bază a subspațiului $(V_1 \cap V_2)$. Fiind un sistem liniar independent se poate completa până la o bază a lui V_1 cu vectorii $y_1, y_2, \dots, y_r$ și la o bază a lui V_2 cu vectorii $z_1, z_2, \dots, z_n$. Punând la un loc vectorii x, y, z ei constituie un sistem de generatori pentru $(V_1 + V_2)$. Rămâne să arătăm că ei sunt liniar independenți.

Dacă

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j + \sum_{k=1}^n \gamma_k z_k = \theta,$$

atunci:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k z_k = -\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^m \beta_j y_j.$$

Membrul stâng este un vector din V_2 , iar membrul drept este un vector din V_1 . Egalitatea lor înseamnă că ambii sunt în $V_1 \cap V_2$. Deci există niște scalari $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k z_k = \sum_{i=1}^r \delta_i x_i, \text{ de unde: } \sum_{i=1}^r \delta_i x_i - \sum_{k=1}^n \gamma_k z_k = \theta.$$

Dar, cum vectorii $x_1, x_2, \dots, x_r, z_1, z_2, \dots, z_n$ constituie bază a lui V_2 rezultă că toți coeficienții combinației liniare din membrul stâng sunt nuli. În particular, toți coeficienții γ sunt nuli.

Din egalitatea $\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j + \sum_{k=1}^n \gamma_k z_k = \theta$ rezultă atunci

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j = \theta$$

Ținând seamă acum că vectorii: $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_n$, constituie o bază a lui V_1 , rezultă că și coeficienții α și β sunt nuli. Q.E.D

L.IV.2.4 PROBLEME PROPUSE

PP.IV.2.4.1 a) Să se arate că mulțimea funcțiilor $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condiția $f(-x) = f(x), (\forall) x \in (-a, a)$ este un subspațiu al spațiului tuturor funcțiilor reale definite pe intervalul $(-a, a)$ (Subspațiul funcțiilor reale pare);

b) Să se arate că mulțimea funcțiilor $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condiția $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in (-a, a)$ este un subspațiu al spațiului tuturor funcțiilor reale definite pe intervalul $(-a, a)$ (Subspațiul funcțiilor reale impare).

PP.IV.2.4.2 Fie S o submulțime din $\mathbb{R}^3$, formată din vectorii:

a) $v_1 = (-i, 1+i, 3-2i), v_2 = (1-i, 0, i), v_3 = (1, -1+i, 2+3i), v_4 = (-2+2i, 0, -2i)$;

b) $v_1 = (5-2i, 0, 1-i), v_2 = (-1-i, 2+i, i), v_3 = (3-4i, 4+2i, 1+i)$.

Să se stabilească dimensiunea subspațiului generat de submulțimea S și să se precizeze care vectori din submulțime pot constitui o bază, în fiecare caz în parte.

PP.IV.2.4.3 Se consideră următoarele familii de vectori din $\mathbb{R}^3$:

a) $v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (-5, -2, 1)$;

b) $u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (-1, 3, 0), u_3 = (2, 0, 3)$.

Fie $L_1 = [v_1, v_2, v_3]$ și $L_2 = [u_1, u_2, u_3]$, subspațiile generate de fiecare familie de vectori. Să se determine: $\dim L_1$, $\dim L_2$, $\dim (L_1 + L_2)$, $\dim (L_1 \cap L_2)$ precum și câte o bază pentru fiecare din subspațiile respective.

PP.IV.2.4.4 Fie subspațiile vectoriale W și U generate de vectorii:

a) $w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (0, 3, 1), w_3 = (2, -1, 1)$;

b) $u_1 = (1, -2, 4), u_2 = (-2, 4, -8)$.

1) Să se verifice dacă admit sumă directă și, în caz afirmativ, să se determine suma lor directă;

2) Să se găsească descompunerea vectorului $v = (5, -7, 13)$ pe aceste subspații.

PP.IV.2.4.5 Fie vectorii: $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (\alpha, 2, 1)$ din $\mathbb{R}^3$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Să se determine α astfel încât subspațiul W generat de cei trei vectori să aibă dimensiunea 2. Să se scrie forma generală a vectorilor din W și să se indice toate subspațiile $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât $\mathbb{R}^3 = W \oplus W_1$.

PP.IV.2.4.6 Să se arate că mulțimile $U = \{u_1 = (1, 5, 3), u_2 = (2, 0, 6)\}$ și $W = \{w_1 = (-1, 7, -3), w_2 = (4, 5, 12)\}$ generează același subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

L.IV.2.5 TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.IV.2.5.1 Să se precizeze care dintre următoarele mulțimi din $\mathbb{R}^3$ sunt subspații vectoriale și, în caz afirmativ, să se stabilească dimensiunea subspațiului:

1) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$;

2) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = 0\}$.

TAev.IV.2.5.2 Fie $C^0(\mathbb{R})$ spațiul vectorial real al funcțiilor reale și continue. Să se precizeze care dintre următoarele submulțimi ale lui $C^0(\mathbb{R})$ sunt liniar dependente, respectiv liniar independente și să se stabilească dimensiunile subspațiilor generate.

1) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$;

2) $\{e^x, e^{-x}, \cosh(x)\}$;

TAev.IV.2.5.3 Fie S o submulțime din $\square^3$ formată din vectorii:

1) $w_1 = (1, 0, 1), w_2 = (-1, 0, -1), w_3 = (3, 0, 3);$

2) $u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (0, 0, 1), u_4 = (1, -1, 2).$

În fiecare caz, să se stabilească dimensiunea subspațiului generat și să se specifice care vectori din submulțime pot constitui o bază. Care sunt ecuațiile carteziane ale fiecărui subspațiu ?

TAev.IV.2.5.4 Fie subspațiile vectoriale W și U generate de vectorii:

a) $w_1 = (2, 1, 0, 1), w_2 = (-2, -1, -1, -1), w_3 = (3, 0, 2, 3);$

b) $u_1 = (1, 1, 2, -1), u_2 = (0, -1, -1, 2), u_3 = (-1, 2, 1, -5).$

Să se determine: $\dim W$, $\dim U$, $\dim (W + U)$, $\dim (W \cap U)$, precum și câte o bază pentru fiecare subspațiu.

TAev.IV.2.5.5 Fie subspațiile $L_1 = [x_1, \dots, x_k]$, $L_2 = [y_1, \dots, y_k]$. Să se determine : $\dim L_1$, $\dim L_2$, $\dim(L_1 + L_2)$, $\dim(L_1 \cap L_2)$, precum și câte o bază pentru fiecare subspațiu în fiecare din cazurile următoare:

a) $x_1 = (0, 1, 1, 1), x_2 = (1, 1, 1, 2), x_3 = (-2, 0, 1, 1);$

$y_1 = (-1, 3, 2, -1), y_2 = (1, 1, 0, -1);$

b) $x_1 = (2, -5, 3, 4), x_2 = (1, 2, 0, -7), x_3 = (3, -6, 2, 5);$

$y_1 = (2, 0, -4, 6), y_2 = (1, 1, 1, 1), y_3 = (3, 3, 1, 5).$

TAev.IV.2.5.6 Se consideră $x_1 = (1, 3, 0, -1), x_2 = (2, 5, 1, 5), x_3 = (1, 2, 1, 3)$ și fie $L_1 = [x_1, x_2, x_3]$ subspațiul generat de cei trei vectori în $\square^4$. Să se afle subspațiul $L_2 \subset \square^4$, astfel încât $L_1 \oplus L_2 = \square^4$ (suma este directă; L_2 cu această proprietate se numește subspațiul complementar lui L_1).

L.IV TEMĂ DE CONTROL

TC.IV.1 Fie V mulțimea tuturor șirurilor f de numere reale: $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $(a_i \in \square, (\forall) i \in \square)$. Dacă $\alpha \in \square$ și $f, g \in V$, unde $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, atunci definim adunarea și înmulțirea cu scalari a șirurilor de numere reale prin:

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots);$$

$$\alpha \cdot f = (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n, \dots).$$

Să se arate că V este spațiu vectorial peste corpul $\square$ în raport cu legile de compoziție:

internă: $+: V \times V \rightarrow V, \quad (f, g) \rightarrow f + g;$

externă: $\cdot: \square \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, f) \rightarrow \alpha \cdot f.$

TC.IV.2 Fie $K_n[X], (K = \square \text{ sau } \square)$ mulțimea polinoamelor de grad cel mult n în nedeterminata X , cu coeficienți în K . Să se arate că mulțimea $K_n[X]$ este spațiu vectorial peste corpul K în raport cu adunarea polinoamelor și cu înmulțirea dintre un element din K și un polinom. Să se arate că polinoamele:

$$1, X, X^2, X^3, \dots, X^n,$$

constituie o bază a lui $K_n[X]$ și că $\dim K_n[X] = n + 1$.

Fie $K[X], (K = \square \text{ sau } \square)$ spațiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X . Să se arate că polinoamele:

$$1, X, X^2, X^3, \dots, X^n, \dots$$

constituie o bază a lui $K[X]$ și că $\dim K[X] = \infty$.

TC.IV.3 Fie V_5 spațiul vectorial real al polinoamelor în $\cos x$ de grad cel mult 4. Să se arate că familiile $B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\}$ și $B' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$ sunt baze ale lui V_5 . Să se determine schimbarea de coordonate care permite trecerea de la baza B la baza B' .

TC.IV.4 Fie $M = \left\{ A \in M_3(\square) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ u & z & 0 \end{pmatrix}; x = y + z \right\}$. Să se arate că:

a) Mulțimea M este un subspațiu vectorial al lui $M_3(\square)$;

b) Matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

constituie o bază a spațiului M .

TC.IV.5 Să se precizeze care dintre următoarele mulțimi din $\square^3$ sunt subspații vectoriale și, în caz afirmativ, să se stabilească dimensiunea subspațiului:

$$1) A = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \square^3 \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \right\};$$

$$2) B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \square^3 \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \right\};$$

TC.IV.6 Fie $C^0(\square)$ spațiul vectorial real al funcțiilor reale și continue. Să se precizeze care dintre următoarele submulțimi ale lui $C^0(\square)$ sunt liniar dependente, respectiv liniar independente și să se stabilească dimensiunile subspațiilor generate.

$$1) \{ \sin(\alpha x), \cos(\alpha x) \};$$

$$2) \{1, \cos(2x), \sin^2(x)\}.$$

TC.IV.7 Fie S o submulțime din $\mathbb{C}^3$ formată din vectorii:

$$1) w_1 = (-i, 0, 1), w_2 = (1-i, 0, i), w_3 = (1-2i, 0, 1+i), w_4 = (0, i, 0);$$

$$2) u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (i, 0, i), u_3 = (0, i, i), u_4 = (i, i, 2i).$$

În fiecare caz, să se stabilească dimensiunea subspațiului generat, respectiv $W = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ și $L = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ și să se specifice care vectori din submulțime pot constitui o bază. Care sunt ecuațiile carteziene ale fiecărui subspațiu? De asemenea, să se determine subspațiul sumă $W + L$ și subspațiul intersecție $W \cap L$ al celor două subspații, dimensiunea și câte o bază pentru fiecare.

TC.IV.8 Fie subspațiile $L_1 = [x_1, x_2, x_3]$, $L_2 = [y_1, y_2, y_3]$. Să se determine: $\dim L_1$, $\dim L_2$, $\dim(L_1 + L_2)$, $\dim(L_1 \cap L_2)$, precum și câte o bază pentru fiecare subspațiu, în cazul:

$$x_1 = (2, 3, 1, 5), x_2 = (1, 1, 5, 2), x_3 = (0, 1, 1, 1);$$

$$y_1 = (2, 1, 3, 2), y_2 = (1, 1, 3, 4), y_3 = (5, 2, 6, 2).$$

Să se stabilească dacă $L_1 + L_2 = \mathbb{C}^4$ și să se descompună vectorul $z = (2, 0, 0, 3)$ după formula $z = x + y, x \in L_1, y \in L_2$.

TC.IV.9 Să se precizeze care dintre următoarele submulțimi din $\mathbb{C}^3$ sunt subspații vectoriale și, în cazul răspunsului afirmativ, să se precizeze și dimensiunea sa:

$$D_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}, \quad D_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1};$$

$$P_1: x + y + z = 0, \quad P_2: x - y - z = 1.$$

TC.IV.10 În $\mathbb{C}^3$ se consideră subspațiile vectoriale: $P: x + 2y - z = 0$ și $Q: 2x - y + 2z = 0$. Pentru fiecare să se fixeze câte o bază și să se determine câte un subspațiu vectorial suplimentar (subspațiul vectorial suplimentar al unui subspațiu dat este un subspațiu care în sumă directă cu cel dat dă, în cazul de față, pe $\mathbb{C}^3$). Să se găsească o bază a sumei $P + Q$ și o bază a intersecției $P \cap Q$.

Bibliografie

1. Udriște C., ș.a., *-Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
2. Udriște C., *-Aplicații de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.

3. Ion D.I., R. Nicolae, -*Algebra*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
4. Flondor D., N. Donciu, -*Algebră și analiză matematică-culegere de probleme*, vol I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
5. Otlăcan E., -*Algebră superioară-îndrumar teoretic și culegere de probleme*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1995.
6. Mânzatu E., Gârban V. -*Algebră cu aplicații rezolvate la calculatorul electronic*, Editura Academiei Militare, București, 1982.