

MODULUL V

APLICAȚII LINIARE, VALORI ȘI VECTORI PROPRII.

Parcurgând acest modul, format din două lecții, veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definiția aplicației liniare, operații cu aplicații liniare, exemple;
- Matricea asociată unei aplicații liniare, schimbarea sa la schimbarea bazelor, nucleul și imaginea unei aplicații liniare;
- Izomorfisme de spații vectoriale finit generate;
- Valori și vectori proprii ai unui operator liniar, polinom caracteristic, subspații proprii, baze formate din vectori proprii;
- Funcții de matrice, operatori de structură simplă;
- Endomorfisme diagonalizabile, endomorfisme jordanizabile, celule Jordan;
- Forma canonică diagonală și forma canonică Jordan, operatori nilpotenți.

Materialul prezentat are o logică matematică corectă, cu o înlănțuire firească a noțiunilor; de aceea se recomandă parcurgerea sa completă, în ordinea dată, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu trebuie să fie cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Vă recomandăm să vă constituiți un caiet de probleme și, pentru fiecare tip de exercițiu, să vă fixați algoritmul de rezolvare pe etape. Rezolvați cât mai complet problemele propuse și cele conținute în testul de autoevaluare.

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestui modul este de 8 ore.

LECȚIA V.1

APLICȚII LINIARE

Parcurgând această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Definiția aplicației liniare, operații cu aplicații liniare, exemple;
- Matricea asociată unei aplicații liniare, schimbarea sa la schimbarea bazelor, nucleul și imaginea unei aplicații liniare;
- Izomorfisme de spații vectoriale finit generate;

Timpul minim pe care trebuie să-l acordați acestei lecții este de 4 ore.

L.V.1.1 Aplicații liniare

Definiție

Fie V și V' două spații vectoriale peste același corp comutativ K . Se numește *aplicație liniară* o funcție $f: V \rightarrow V'$ având următoarele proprietăți:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (aditivitatea).
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (omogenitatea).

Cele două proprietăți exprimă faptul că funcția f păstrează cele două operații ale structurii de spațiu vectorial, adică este ceea ce numim *homomorfism*, sau *morfism de spații vectoriale*. Altfel spus, *morfismul, în cazul spațiilor vectoriale, poartă acest nume specific de aplicație liniară*.

Din cele două condiții din definiția aplicației liniare se deduce cu ușurință relația:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

numită *condiția de liniaritate*. Ea este chiar echivalentă cu cele două condiții deoarece acestea se pot deduce lesne din condiția de liniaritate.

Această relație exprimă faptul că f păstrează combinațiile lineare. De aceea se numește aplicație „liniară”. Evident că o aplicație liniară păstrează orice combinație liniară, nu numai combinațiile liniare de doi vectori.

Exemple

I. Fie A o matrice de tip (m, n) formată cu elemente dintr-un corp comutativ K , $V = M(n, p; K)$ și $V' = M(m, p; K)$. Cu ajutorul matricei A se poate defini o funcție

$$f: M(n, p; K) \rightarrow M(m, p; K),$$

în felul următor $f(X) = A \cdot X$ unde am notat cu X o matrice oarecare de tip (n, p) . Tipul matricelor A și X permite efectuarea produsului $A \cdot X$, iar rezultatul este o matrice de tip (m, p) .

Din proprietățile operațiilor cu matrice rezultă că funcția f este liniară.
Într-adevăr:

$$f(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = f(X_1) + f(X_2);$$

$$f(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha f(X).$$

Acest exemplu dezvăluie bogăția noțiunii de aplicație liniară: orice matrice definește o aplicație liniară.

1. Considerăm $D: C_{[a,b]}^{(n)} \rightarrow C_{[a,b]}^{(n-1)}$ definită prin operația de derivare. Proprietățile operației de derivare asigură că această funcție este o aplicație liniară.

2. La fel, funcția $I: C_{[a,b]}^{(n)} \rightarrow C_{[a,b]}^{(n+1)}$; $I(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ este o aplicație liniară.

Operații cu aplicații liniare

Cu aplicațiile liniare se pot defini diverse operații.

– *Adunarea*. Dacă f și g sunt aplicații liniare definite pe V cu valori în V' atunci funcția $f + g$ definită prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ este tot o aplicație liniară definită pe V cu valori în V' .

– *Înmulțirea cu scalar*. Pentru orice aplicație liniară f definită pe V cu valori în V' funcția αf definită prin $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ este tot o aplicație liniară definită pe V cu valori în V' .

– *Compunerea aplicațiilor liniare*. Dacă $f: V \rightarrow V'$ și $g: V' \rightarrow V''$ sunt aplicații liniare atunci funcția gf definită prin: $gf(x) = g(f(x))$ este o aplicație liniară definită pe V cu valori în V'' .

Demonstrarea afirmațiilor de mai sus constă în verificarea celor două condiții din definiția aplicației liniare, lucru ce nu prezintă dificultăți, astfel că este lăsată ca exercițiu.

Notăm $\text{Hom}_k(V, V')$ mulțimea aplicațiilor liniare definite pe V cu valori în V' . Din cele de mai sus rezultă că adunarea este o operație internă iar înmulțirea cu scalar este o operație externă pe această mulțime.

Dacă $V' = V$ atunci în loc de $\text{Hom}_k(V, V')$ se scrie $\text{End}_k(V)$ (mulțimea *endomorfismelor* lui V). Pentru această mulțime, operația de compunere a aplicațiilor liniare este o operație internă.

Verificând proprietățile care definesc structurile de spațiu vectorial, înel, algebră peste un corp, se demonstrează fără dificultate următoarea:

Propoziție

1. Adunarea și înmulțirea cu scalari definesc pe mulțimea $\text{Hom}_k(V, V')$ o structură de *spațiu vectorial peste corpul* K .
2. Adunarea și compunerea definesc pe mulțimea $\text{End}_k(V)$ o structură de *inel*.
3. Adunarea, înmulțirea cu scalari și compunerea definesc pe $\text{End}_k(V)$ o structură de *algebră peste corpul* K . Aceasta înseamnă că pe lângă faptul că este inel și spațiu vectorial, sunt satisfăcute relațiile $(\alpha f)g = \alpha(fg) = f(\alpha g)$.

L.V.1.2 Matricea unei aplicații liniare.

Schimbarea sa la schimbarea bazelor

Aplicatii liniare între spatii finit dimensionale

Fie $f: V \rightarrow V'$ o aplicație liniară între două spații vectoriale finit generate peste același corp comutativ K . Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ este o bază în V și $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ o bază în V' atunci vectorii: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ sunt în V' și deci se scriu, în mod unic, ca niște combinații liniare de vectorii $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{21}x'_2 + \dots + \alpha_{m1}x'_m \\ f(x_2) &= \alpha_{12}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \dots + \alpha_{m2}x'_m \\ &\vdots \\ f(x_n) &= \alpha_{1n}x'_1 + \alpha_{2n}x'_2 + \dots + \alpha_{mn}x'_m \end{aligned}$$

S-a format astfel o matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

numită *matricea aplicației liniare* f în raport cu bazele $x_1, x_2, \dots, x_n$ din V și $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ din V' . Această matrice se alcătuiește plasând pe coloane coordonatele vectorilor $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ în baza $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$.

Folosind matricea A , relațiile vectoriale care exprimă vectorii $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ în funcție de vectorii $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ se pot scrie sub formă matriceală:

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)A.$$

Matricea A este la rândul ei determinată de cele două baze.

Propoziție

Dacă

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) A_1;$$

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) A_2,$$

atunci $A_1 = A_2$

Demonstrație

Scăzând membru cu membru cele două relații rezultă:

$$0 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) (A_1 - A_2),$$

unde 0 din membrul stâng înseamnă matricea linie formată cu m vectori, toți egali cu vectorul nul din spațiul V' . Notând γ_{ij} elementul generic al matricei $(A_1 - A_2)$ putem scrie:

$$0 = \gamma_{11}x'_1 + \gamma_{21}x'_2 + \dots + \gamma_{m1}x'_m.$$

Din liniar independența vectorilor $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ rezultă că: $\gamma_{11} = 0, \gamma_{21} = 0, \dots, \gamma_{m1} = 0$ adică prima coloană a matricei $A_1 - A_2$ este nulă. La fel se arată că și celelalte coloane ale matricei $A_1 - A_2$ sunt nule și în consecință $A_1 = A_2$. Q.E.D.

Utilitatea matricei unei aplicații liniare

Fie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ coordonatele cunoscute ale vectorului x din V și ne propunem să aflăm coordonatele $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m$ ale vectorului $f(x)$ din V' folosind matricea A .

Din liniaritatea funcției f rezultă:

$$f(x) = f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n) = \xi_1 f(x_1) + \xi_2 f(x_2) + \dots + \xi_n f(x_n) =$$

$$= (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pe de altă parte, } f(x) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \cdot \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_m \end{pmatrix}.$$

Din unicitatea scrierii vectorului $f(x)$ ca o combinație liniară de vectorii bazei $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ se obține:

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Așadar, *coloana coordonatelor vectorului $f(x)$ se obține prin înmulțirea matricei A cu coloana coordonatelor lui x .*

Observații

1. Rezultatul obținut mai sus are următoarea semnificație: este suficient să cunoaștem imaginile $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ale vectorilor bazei, pentru ca să putem deduce imaginile prin f ale tuturor vectorilor din V . Într-adevăr, cunoașterea matricei A înseamnă cunoașterea vectorilor $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

2. În paragraful anterior am menționat că mulțimea $\text{Hom}_k(V, V')$ a aplicațiilor liniare de la V la V' are o structură de spațiu vectorial peste corpul K . Asociind fiecărei aplicații liniare o matrice de tip (m, n) se definește o funcție de la spațiul $\text{Hom}_k(V, V')$ la spațiul $M(m, n; K)$ al matricelor de tip (m, n) formate cu elemente din corpul comutativ K .

Este ușor de verificat că această aplicație este liniară: sumei $f + f_2$ îi corespunde suma $A_1 + A_2$ a matricelor corespunzătoare, iar aplicației αf îi corespunde produsul αA dintre scalarul α și matricea A corespunzătoare lui f .

Observația anterioară atestă că această aplicație este injectivă: nu pot exista două aplicații liniare definite de aceeași matrice din moment ce matricea determină aplicația liniară care a definit-o.

Dar această aplicație este și surjectivă deoarece oricare ar fi matricea A , de tip (m, n) , relația :

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

definește o aplicație liniară de la V la V' .

Așadar spațiul $\text{Hom}_k(V, V')$ este izomorf cu spațiul $M(m, n; K)$.

În cazul $V' = V$ obținem că algebra $\text{End}_k(V)$ este izomorfă cu algebra $M(n; K)$ a matricelor pătratice de ordinul n .

Formula de schimbarea a matricei unei aplicații lineare la schimbarea bazelor

Din felul cum a fost construită matricea A , ea depinde de bazele $x_1, x_2, \dots, x_n$ din V și $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ din V' . Mai mult, propoziția anterioară afirmă că matricea A este chiar determinată de aceste baze. Ne propunem să aflăm ce devine matricea A atunci când se schimbă bazele.

Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$ o nouă bază în V și $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ o nouă bază în V' . Să notăm T matricea de trecere de la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ la baza $y_1, y_2, \dots, y_n$ și S matricea de trecere de la baza $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ la baza $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$. Să mai notăm cu B matricea aplicației liniare f în raport cu bazele $y_1, y_2, \dots, y_n$ din V și $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ din V' . Din definițiile matricelor T, S, A și B rezultă relațiile:

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)T$$

$$(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)S^{-1} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$$

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \cdot A$$

$$(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)) = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \cdot B$$

Notăm $f[(y_1, y_2, \dots, y_n)] = (f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n))$. Prin această notație precizăm că aplicarea funcției f unei matrice (linie) formate din vectori înseamnă aplicarea funcției f vectorilor acestei matrice. Avem:

$$(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)) = f[(y_1, y_2, \dots, y_n)] = f[(x_1, x_2, \dots, x_n)T].$$

Să remarcăm mai departe că vectorii matricei linie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot T$ sunt combinații liniare de vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$. Când se aplică funcția liniară f acestor combinații liniare, ea se aplică numai vectorilor acestor combinații liniare, deci:

$$f[(x_1, x_2, \dots, x_n)T] = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \cdot T$$

Așadar,

$$\begin{aligned} (f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)) &= (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \cdot T = \\ &= (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \cdot A \cdot T = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \cdot S^{-1} \cdot A \cdot T. \end{aligned}$$

Dar deoarece, $(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)) = f(y'_1, y'_2, \dots, y'_m) B$ din propoziția demonstrată mai sus, rezultă că:

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Formula de transformare a matricei unui operator liniar la schimbarea bazei

Dacă $V' = V$ atunci, așa cum am precizat în paragraful anterior, morfismul f se numește endomorfism. El poartă numele specific de *operator liniar* în cazul spațiilor vectoriale.

În cazul când f este operator liniar (deci $V = V'$) se ia, firește, aceeași bază în V atât în rol de domeniu de definiție al funcției f cât și în rol de codomeniu. Așadar, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ și în consecință $S = T$.

Ca urmare formula de transformare a matricei unui operator liniar al unui spațiu vectorial atunci când se schimbă baza spațiului, devine:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Scrierea formulelor sub forma concentrată

Fie $f: V \rightarrow V$ un operator liniar al spațiului vectorial V și $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o bază în V . Notăm α_i^j elementul generic al matricei A a operatorului f în baza $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Coordonatele unui vector x în această bază le notăm $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, adică:

$$x = \xi^i x_i,$$

potrivit convenției conform căreia, dacă se repetă un indice, unul superior și altul inferior, atunci se înțelege sumarea după acel indice.

Relația matriceală: $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) A$ se scrie sub forma concentrată astfel:

$$f(x_i) = \alpha_i^j x_j.$$

Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ este o nouă bază notăm β_i^j elementul generic al matricei B a operatorului f în această nouă bază, adică:

$$f(y_i) = \beta_i^j y_j.$$

Notăm γ_i^j , χ_i^j elementul generic al matricei T , respectiv T^{-1} , în care T este matricea de trecere de la baza $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la baza $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ adică:

$$y_i = \gamma_i^j x_j; \quad x_i = \chi_i^j y_j.$$

Rezultă: $f(y_i) = f(\gamma_i^j x_j) = \gamma_i^j f(x_j) = \gamma_i^j \alpha_j^k x_k = \gamma_i^j \alpha_j^k \chi_k^l y_l$. Pe de altă parte, $f(y_i) = \beta_i^l y_l$. Din unicitatea scrierii vectorului $f(y_i)$ ca o combinație liniară de vectorii bazei $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ rezultă că pentru orice indici i și l este îndeplinită egalitatea:

$$\beta_i^l = \gamma_i^j \alpha_j^k \chi_k^l,$$

care reprezintă tocmai forma concentrată a relației matriceale $B = T^{-1}AT$.

L.V.1.3 Izomorfismul spațiilor vectoriale finit generate

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Nucleul

Fie $f: V \rightarrow V'$ o aplicație liniară. Pentru orice submulțime M' a lui V' se notează:

$$f^{-1}(M') = \{x \in V; f(x) \in M'\}$$

numită *preimaginea submulțimii M' prin f* . Trebuie să distingem între această funcție definită pe mulțimea părților lui V' cu valori în mulțimea părților lui V , numită *funcția preimagine*, și inversa lui f , care se notează tot f^{-1} , definită însă pe V' cu valori în V , numai atunci când funcția f este bijectivă.

Este ușor de verificat că dacă M' este un subspațiu al lui V' , atunci $f^{-1}(M')$ este subspațiu al lui V .

În particular numim *nucleul aplicației f* , care se notează $\text{Ker}f$ preimaginea subspațiului nul al lui V' : $\text{Ker}f = f^{-1}(\{\theta'\})$ în care θ' este vectorul nul din V' . Mai precis,

$$\text{Ker}f = \{x \in V, f(x) = \theta'\}$$

care, așa cum am spus, este subspațiu al lui V .

Nucleul poate oferi o informație interesantă despre aplicația liniară și anume: *aplicația liniară f este injectivă dacă și numai dacă nucleul său conține numai vectorul nul.*

Într-adevăr, dacă f este injectivă, atunci cum $f(\theta) = \theta'$, din $f(x) = \theta'$ rezultă că $x = \theta$ și deci $\text{Ker}f = \{\theta\}$. Reciproc, presupunem că $\text{Ker}f = \{\theta\}$. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $f(x_1 - x_2) = \theta'$, adică $x_1 - x_2 \in \text{Ker}f$ de unde $x_1 - x_2 = \theta$ și deci $x_1 = x_2$. Așadar f este injectivă.

Imaginea

Funcția f permite și definirea unei alte funcții, notată tot f , care are ca domeniu de definiție mulțimea părților lui V și drept codomeniu mulțimea părților lui V' . Dacă M este o submulțime a lui V atunci *imagea lui M prin f* se definește astfel:

$$f(M) = \{f(x); x \in M\} \text{ sau } f(M) = \{y \in V'; \text{ există } x \in M, \text{ astfel încât } f(x) = y\}$$

Această funcție se numește *funcția imagine directă*. Este ușor de verificat că dacă M este subspațiu al lui V atunci $f(M)$ este subspațiu al lui V' .

În particular, luând pentru M spațiul total V , imaginea sa se numește *imagea lui f* și se notează $\text{Im}f$. Mai precis,

$$\text{Im}f = f(V) = \{f(x); x \in V\}.$$

Chiar dacă funcția f nu este liniară, surjectivitatea ei înseamnă $\text{Im}f = V'$.

Determinarea nucleului

Să considerăm acum cazul când spațiile V și V' sunt finit generate. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ o bază în V , $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ o bază în V' și $A = (\alpha_{ji})$ matricea lui f în raport cu cele două baze.

Notând X coloana coordonatelor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ale vectorului $x \in V$, condiția $x \in \text{Ker}f$ este echivalentă cu $A \cdot X = 0$ unde cu 0 am notat coloana nulă.

Așadar determinarea nucleului aplicației f se reduce la rezolvarea sistemului omogen $A \cdot X = 0$.

Dimensiunea subspațiului $\text{Ker}f$ este tocmai gradul de nedeterminare al sistemului, adică. $n - \text{rang}A$. O bază a subspațiului înseamnă tocmai un sistem fundamental de soluții, care se determină, de exemplu, folosind metoda eliminării succesive.

Determinarea imaginii

Din definiția imaginii lui f se deduce ușor că acesta este subspațiul lui V' generat de vectorii $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$: $\text{Im}f = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$.

Coloanele coordonatelor acestor vectori, în baza $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ a lui V' sunt tocmai coloanele matricei A . Conform unei teoreme din capitolul precedent, dimensiunea acestui subspațiu este egală cu rangul matricei A .

Se poate determina o bază a subspațiului folosind procedeul general de extragere a unei baze dintr-un sistem de generatori.

Din dimensiunile deduse ale imaginii și nucleului rezultă următoarea teoremă.

Teoremă

$$\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

Interpretarea sistemelor de ecuații liniare

Fie $f: V \rightarrow V'$ un operator liniar care în raport cu bazele $x_1, x_2, \dots, x_n$ și $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ ale celor două spații este reprezentat de matricea A de tip (m, n) .

Notând, ca mai sus, cu X coloana coordonatelor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ale vectorului $x \in V$, coloana coordonatelor lui $f(x) = b$ este AX . Așadar ecuația vectorială $f(x) = \theta'$ care are drept mulțime de soluții nucleul lui f se scrie sub forma: $AX = 0$, adică un sistem liniar și omogen. Cu alte cuvinte soluția sistemului omogen $AX = 0$ este subspațiul $f^{-1}(\theta')$.

În acest context, semnificația faptului că aplicația f este injectivă este că sistemul omogen $AX = 0$ este determinat, adică are numai soluția banală. Prin urmare rangul matricei A este egal cu numărul n al coloanelor sale.

Dacă $B \in K^m$, atunci sistemul $AX = B$ este echivalent cu ecuația vectorială $f(x) = b$ unde $b \in V'$ este vectorul ale cărui coordonate în baza $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ sunt elementele coloanei B . Prin urmare mulțimea soluțiilor sistemului neomogen $AX = B$ este tocmai $f^{-1}(\{b\})$.

Dacă X_0 este o soluție particulară a sistemului neomogen $AX = B$, atunci, după cum se știe, soluția generală a sistemului neomogen este suma dintre X_0 și soluția generală a sistemului omogen. Altfel spus, mulțimea $f^{-1}(\{b\})$ este $x_0 + \text{Ker } f$ unde $x_0 \in V$ este vectorul ale cărui coordonate sunt elementele coloanei X_0 .

Compatibilitatea sistemului $AX = B$ înseamnă că vectorul b se află în subspațiul $\text{Im } f$ al lui V' . Reamintim că acest subspațiu este generat de vectorii din V' care au drept coordonate elementele coloanelor matricei A , adică $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Surjectivitatea lui f înseamnă că $\text{Im } f = V'$, adică:

$$\dim[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)] = \dim V' = m$$

Cum $\dim[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)] = \text{rang} A$ rezultă $\text{rang} A = m$ adică este egal cu numărul liniilor matricei A . În acest caz, și teorema Kronecker-Capelli ne asigură că sistemul $AX = B$ este compatibil oricare ar fi coloana $B \in K^m$.

Reamintim că dacă X_0 este o soluție a sistemului $AX = B$, atunci soluția generală se obține adunând la X_0 soluția generală a sistemului omogen $AX = 0$. Acest lucru este exprimat de următoarea egalitate:

$$f^{-1}(\{b\}) = x_0 + \text{Ker} f,$$

unde x_0 este vectorul din V având drept coordonate elementele coloanei X_0 , iar b este vectorul din V' având drept coordonate elementele coloanei B .

Izomorfismul spațiilor vectoriale

Pentru ca aplicația liniară $f: V \rightarrow V'$ să fie un izomorfism trebuie să fie atât injectivă cât și surjectivă. Am stabilit mai sus că pentru aceasta este necesar ca :

$$\text{rang} A = n \text{ (numărul coloanelor)} = m \text{ (numărul liniilor)},$$

adică matricea A trebuie să fie pătratică de ordinul n și inversabilă.

Este ușor de verificat că în acest caz matricea A^{-1} definește o aplicație liniară de la V' la V care este chiar inversa aplicației liniare f .

Așadar, două spații vectoriale finit generate sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

Este atunci convenabil ca pentru orice număr natural n să fixăm un spațiu concret și anume $V = K^n$. Tot ce derivă din structura de spațiu vectorial a lui K^n este valabil pentru orice alt spațiu vectorial de dimensiune n peste corpul K .

L.V.1.4 PROBLEME PROPUSE

PP.V.1.4.1 Să se cerceteze care din funcțiile:

- 1) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x_1 \cos(x_2), x_1 \sin(x_2), x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
- 2) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x) = (-3x_1 - 7x_2 - 5x_3, 2x_1 + 4x_2 + 3x_3, -x_1 - 3x_2 - 2x_3)$,
 $x = (x_1, x_2, x_3)$ este transformare liniară ? În caz afirmativ să se determine $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$ și $\text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

PP.V.1.4.2 Să se determine matricea asociată transformării liniare, în raport cu bazele canonice ale spațiilor vectoriale, în fiecare dintre cazurile:

- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x) = ix$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
- b) $T : M_{2 \times 2}(K) \rightarrow M_{2 \times 2}(K)$, $T(A) = A^t$;
- c) $T : \mathbb{C} \rightarrow M_{2 \times 2}(K)$, $T(z) = z \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

Să se determine apoi rangul și defectul lui T .

PP.V.1.4.3 Fie $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o aplicație definită prin:
 $T(x) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + x_3)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se arate că T este endomorfism și să se scrie matricele atașate lui T în baza canonică și în baza $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (1, -1, -1)$. Să se determine $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$, câte o bază pentru fiecare dintre aceste subspații și să se calculeze $\text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

PP.V.1.4.4 Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, astfel încât $T(0, 0, 1) = (2, 3, 5)$, $T(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $T(1, 1, 1) = (0, 1, -1)$. Să se determine matricea endomorfismului T în baza canonică.

PP.V.1.4.5 Fie aplicația $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definită prin:
 $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 & 0 \end{pmatrix}$, unde $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se arate că T este aplicație liniară și să se determine $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$, câte o bază pentru fiecare dintre aceste subspații și să se calculeze $\text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$;

b) Să se scrie matricea lui T în bazele canonice din $\mathbb{R}^3$ și $M_2(\mathbb{R})$.

L.V.1.5 TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.V.1.5.1 Fie P_n spațiul vectorial complex al funcțiilor polinomiale de grad cel mult n . Să se arate că funcția $T : P_n \rightarrow P_n$, $Tp(x) = p(x+3) - p(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{C}$, este o transformare liniară. Să se cerceteze dacă T este injectivă.

TAev.V.1.5.2 Fie endomorfismul $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ dat prin matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ în raport cu baza canonică a lui } \mathbb{C}^3. \text{ Să se arate că}$$

vectorii $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 1, 2)$, $v_3 = (2, 3, 1)$ formează o bază în $\mathbb{C}^3$ și să se determine matricea lui T în raport cu această bază.

TAev.V.1.5.3 Fie aplicația $f : \mathbb{C}_2[X] \rightarrow \mathbb{C}_2[X]$, $f(P) = X \cdot P' + P$, unde P' este derivata polinomului $P \in \mathbb{C}_2[X]$. Să se arate că f este endomorfism și să se scrie matricea sa în bazele $B = \{1, X, X^2\}$ și $B' = \{2, 1+X, X^2\}$.

TAev.V.1.5.4 Fie transformarea liniară $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, definită prin: $T(a_1) = b_1$, $T(a_2) = b_2$, $T(a_3) = b_3$, unde $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, -3, -2)$, $a_3 = (1, 2, 1)$ și $b_1 = (-2, 1, 0)$, $b_2 = (-1, 3, 0)$, $b_3 = (-2, -3, 0)$. Să se determine matricea transformării liniare T :

- a) în baza $\{a_1, a_2, a_3\}$;
- b) în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$;
- c) în baza $\{b_1, b_2, b_3\}$.

TAev.V.1.5.5 Fie aplicațiile liniare: $T_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ și $T_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$, definite prin:

$T_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ și $T_2(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, y_1, y_2, 2y_1 - y_2)$, unde $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ și $(y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$. Să se determine produsul $T_2 \circ T_1$ și matricele operatorilor liniari $T_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $T_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ și $T_2 \circ T_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ în baza canonică.

LECȚIA V.2

VALORI ȘI VECTORI PROPRII AI UNUI OPERATOR LINIAR

Parcurgând această lecție veți dobândi cunoștințe referitoare la:

- Valori și vectori proprii ai unui operator liniar, polinom caracteristic, subspații proprii, baze formate din vectori proprii;
- Funcții de matrice, operatori de structură simplă;
- Endomorfisme diagonalizabile, endomorfisme jordanizabile, celule Jordan;
- Forma canonică diagonală și forma canonică Jordan, operatori nilpotenți;

Timpu minim pe care trebuie să-l acordați acestei lecții este de 4 ore.

L.V.2.1 Valori proprii și vectori proprii ai unui operator

Noțiunea de vector propriu

Fie $f: V \rightarrow V$ un operator liniar al spațiului vectorial finit generat V peste corpul comutativ K . Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ este o bază a lui V , atunci operatorului f se asociază matricea A astfel încât:

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot A.$$

Dacă se schimbă baza în V atunci se schimbă și matricea A . Ea se transformă în matricea $B = T^{-1}AT$, unde T este matricea de trecere de la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ la noua bază.

Ne propunem să găsim o nouă bază, $v_1, v_2, \dots, v_n$ în care matricea B a operatorului f să fie o matrice diagonală:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Din relația de definiție a matricei B , și anume:

$$(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot B,$$

deducem că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ ai noii baze trebuie să îndeplinească condițiile:

$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \dots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n \end{cases},$$

care conduc la următoarea noțiune:

Definiție

Se numește *vector propriu al operatorului* f un vector v care îndeplinește următoarele două condiții:

1. $v \neq \theta$;
2. $f(v) = \lambda v$.

Prin urmare problema găsirii unei baze în care matricea operatorului să aibă forma diagonală se reduce la găsirea vectorilor proprii.

Calculul vectorilor proprii

Fie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ coordonatele vectorului v în baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ adică $v = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$. Condiția $v \neq \theta$ înseamnă că nu toate coordonatele $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sunt nule.

Pe de altă parte, coloana coordonatelor vectorului $f(v)$, așa cum s-a stabilit, se obține înmulțind matricea A cu coloana coordonatelor lui v . Deci condiția $f(v) = \lambda v$ este echivalentă cu:

$$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{de unde, } (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ultima relație matriceală este forma matriceală a unui sistem liniar și omogen de n ecuații cu n necunoscute: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Prima condiție înseamnă că sistemul este nedeterminat, ceea ce, după teorema Kronecker- Capelli, revine la:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Acest determinant a fost pus în evidență în capitolul 2 și s-a observat că este un polinom de gradul n în λ , ce a fost numit polinomul caracteristic al matricei A , notat $\varphi_A(\lambda)$. Rădăcinile polinomului $\varphi_A(\lambda)$ au fost numite valorile proprii ale matricei A .

Am ajuns deci la următorul rezultat: scalarul λ din definiția vectorului propriu nu poate fi un scalar oarecare: el trebuie să fie o rădăcină a polinomului caracteristic al matricei A .

S-a conturat deci metoda de calculare a vectorilor proprii, și anume:

- Se calculează valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ale matricei A a operatorului.
- Pentru fiecare valoare proprie λ_i se rezolvă sistemul liniar și omogen:

$$(A - \lambda_i I_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fiecare soluție nebanală a sistemului reprezintă coordonatele unui vector propriu v_i care îndeplinește condiția: $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Evident că sistemul, fiind nedeterminat, are o infinitate de soluții. Anume, dacă v_i este un vector propriu atunci pentru orice scalar α , vectorul αv este vector propriu corespunzător aceleiași valori proprii λ_i .

Observații

1. Deși valorile proprii ale unui operator se definesc și se calculează folosind matricea operatorului într-o bază, ele nu depind de bază. Într-adevăr, dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ este o altă bază și T este matricea de trecere de la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ la baza $y_1, y_2, \dots, y_n$ iar B matricea lui f în noua bază atunci, ținând seamă că determinantul produsului de matrice este produsul determinantilor matricelor, obținem:

$$\begin{aligned} \varphi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}I_n T) = \det[T^{-1}(A - \lambda I_n)T] = \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det T = \det(A - \lambda I_n) = \varphi_A(\lambda). \end{aligned}$$

2. Același lucru este valabil și pentru vectorii proprii: vectorii proprii v_i , corespunzători valorii proprii λ_i , au drept coordonate în baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ soluțiile sistemului liniar și omogen:

$$(A - \lambda_i I_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Înmulțind această ecuație matriceală la stânga cu T^{-1} ea devine:

$$\left(T^{-1}ATT^{-1} - \lambda_i I_n T^{-1}\right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad (B - \lambda_i I_n) T^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

adică $T^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, care este coloana coordonatelor lui v_i în noua bază

$y_1, y_2, \dots, y_n$, este soluție a sistemului care dă coordonatele vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ_i folosind noua bază, $y_1, y_2, \dots, y_n$ și matricea B a lui f în această nouă bază. Deci folosind o altă bază vom obține aceiași vectori proprii.

Subspațiul vectorilor proprii corespunzători unei valori proprii

Fie λ o valoare proprie a unui operator liniar f al spațiului vectorial V . Observăm că mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ nu constituie un subspațiu deoarece, din definiția vectorului propriu, această mulțime nu conține vectorul nul, θ .

Să notăm V_λ mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ , la care se adaugă și vectorul nul. Este ușor de verificat că V_λ constituie un subspațiu pe care-l vom numi *subspațiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ* .

Vectorii acestui subspațiu sunt definiți de relația $f(x) = \lambda x$.

Exemplu

Reamintim că termenul liber al polinomului caracteristic al matricei A este $\sigma_n = \det A$. Înseamnă că operatorul f reprezentat de matricea A admite valoarea proprie $\lambda = 0$ dacă și numai dacă $\det A = 0$. Se observă că numai în acest caz sistemul

$$(A - 0 \cdot I_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

are soluții nebanale.

Subspațiul V_0 , al vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 0$, constituit, așa cum am spus mai sus, din mulțimea soluțiilor ecuației vectoriale $f(x) = \theta$, este tocmai nucleul operatorului f , care a fost notat $\text{Ker} f$.

L.V.2.2 Baze formate din vectori proprii. Funcții de matrice de structură simplă

În cazul când cunoaștem valorile proprii ale matricei A a operatorului f într-o bază $x_1, x_2, \dots, x_n$ a spațiului V , adică rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ale polinomului $\varphi_A(\lambda)$ se pot determina toți vectorii proprii ai operatorului. Pentru fiecare valoare proprie λ_i alegem un vector propriu v_i care îndeplinește condiția $f(\lambda_i) = \lambda_i v_i$ numit *vector propriu asociat valorii proprii λ_i* . Vom arăta că în anumite condiții vectorii obținuți formează o bază a spațiului V .

Teoremă

Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenți.

Demonstrație

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ valori proprii *distincte între ele* și $v_1, v_2, \dots, v_r$ vectori proprii corespunzători. Este de demonstrat că pentru orice număr natural $r \geq 1$ vectorii $v_1, v_2, \dots, v_r$ sunt liniar independenți. Folosim metoda inducției.

Etapa de verificare

Pentru $r=1$ fie v_1 un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1 . Din definiția vectorului propriu, rezultă că $v_1 \neq \theta$. Dacă sistemul format numai din vectorul v_1 ar fi liniar dependent ar însemna că există un scalar nenul α astfel încât: $\alpha v_1 = \theta$. Înmulțind ambii membri ai egalității cu α^{-1} (care există din moment ce α este nenul), se obține: $v_1 = \theta$, ceea ce contrazice definiția vectorului propriu.

Din demonstrația de mai sus este util de reținut faptul că orice vector nenul constituie un sistem liniar independent. Singurul vector care constituie un sistem liniar dependent este vectorul nul.

Etapa de demonstrație

Ipoteza

Orice sistem de r vectori proprii $v_1, v_2, \dots, v_r$ ce corespund la r valori proprii *distincte* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sunt liniar independenți.

Concluzia

Orice sistem de $r+1$ vectori proprii $v_1, v_2, \dots, v_{r+1}$ corespunzând la $r+1$ valori proprii *distincte* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$ sunt liniar independenți.

Demonstrație

Pentru a demonstra liniar independența vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_{r+1}$ pornim de la relația:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = \theta \quad (*)$$

Aplicăm funcția liniară f ambilor membri ai egalității. Ținând seamă de liniaritatea lui f și de faptul că $f(\theta) = \theta$ obținem:

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_r f(v_r) + \alpha_{r+1} f(v_{r+1}) = \theta.$$

Deoarece $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $j = 1, 2, \dots, r+1$ ultima egalitate devine:

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = \theta.$$

Înmulțim prima egalitatea (*) cu $(-\lambda_{r+1})$ și o adunăm la ultima:

$$\begin{aligned} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) v_2 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r + \\ + \alpha_{r+1} (\lambda_{r+1} - \lambda_{r+1}) v_{r+1} = \theta. \end{aligned}$$

Ultimul termen este, evident, nul, iar egalității:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) v_2 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = \theta$$

i se poate aplica *ipoteza*.

$$\text{Rezultă că } \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0; \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = 0, \dots, \alpha_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0.$$

În membrul stâng al fiecărei egalități paranteza este nenulă deoarece valorile proprii sunt distincte între ele. Deci: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_r = 0$. Înlocuind acești coeficienți în egalitatea: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = \theta$, se obține: $\alpha_{r+1} v_{r+1} = \theta$.

Urmând același raționament ca în etapa de verificare, adică folosind faptul că v_{r+1} , ca vector propriu, este nenul, deducem că $\alpha_{r+1} = 0$.

Așadar, pornind de la egalitatea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = \theta$ am ajuns la concluzia că toți coeficienții combinației liniare din membrul stâng sunt nuli, adică vectorii v_i sunt liniar independenți. Q.E.D.

Consecință

Dacă polinomul caracteristic $\varphi_A(\lambda)$ are n rădăcini distincte, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, atunci vectorii proprii corespunzători, $v_1, v_2, \dots, v_n$ constituie o bază.

Într-adevăr, din teorema anterioară, rezultă că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ sunt liniar independenți. Numărul lor fiind egal cu dimensiunea spațiului rezultă că vectorii constituie o bază.

Definiție

Un operator liniar se zice *de structură simplă* dacă admite o bază formată din vectori proprii.

Din cele de mai sus rezultă că dacă operatorul are n valori proprii distincte, atunci el este de structură simplă.

Notând cu A matricea operatorului în baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ și cu T matricea de trecere de la baza $x_1, x_2, \dots, x_n$ la o bază $v_1, v_2, \dots, v_n$ formată din vectori proprii, atunci matricea B a operatorului în noua bază este:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte se îndeplinește relația: $B = T^{-1}AT$. Rezultă că matricea A se poate scrie sub forma: $A = TBT^{-1}$.

Funcții de matrice de structură simplă

În cazul când matricea A este matricea unui operator de structură simplă (convenim atunci ca matricea însăși s-o numim de structură simplă) se pot calcula cu ușurință diverse funcții de matricea A .

În primul rând să observăm că:

$$A^2 = A \cdot A = TBT^{-1} \cdot TBT^{-1} = TB^2T^{-1}$$

și în general, $A^k = TB^kT^{-1}$. Evident că

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Așadar se pot calcula cu ușurință puterile matricei A .

Putem trece acum de la funcția putere (naturală) la o funcție polinomială. Anume, fie $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \alpha_mx^m$ un polinom cu coeficienți scalari (adică în corpul K). Prin $u(A)$ înțelegem:

$$\begin{aligned} u(A) &= \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m = \\ &= \alpha_0 TT^{-1} + \alpha_1 TBT^{-1} + \alpha_2 TB^2T^{-1} + \dots + \alpha_m TB^mT^{-1} = \\ &= T(\alpha_0 I_n + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_m B^m)T^{-1} = T \cdot u(B) \cdot T^{-1} \end{aligned}$$

Pe de altă parte este ușor de văzut că:

$$u(B) = \begin{pmatrix} u(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

În cazul când $u(x)$ este o serie $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m + \dots$ formula de mai sus este valabilă pentru toate sumele parțiale ale seriei, pe care le notăm, $u_m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m$ anume: $u_m(A) = T \cdot u_m(B) \cdot T^{-1}$ cu

$$u_m(B) = \begin{pmatrix} u_m(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_m(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_m(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

În cazul când corpul K are o structură topologică, așa cum este cazul corpurilor Q, R, C sau un corp p -adic această structură este aplicată în mod natural și mulțimii de matrice, astfel încât se pune problema convergenței șirului de matrice $u_m(A)$.

De exemplu, în cazul $K = R$ seria numerică

$$u(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$$

este convergentă pentru orice $x \in R$ având ca sumă numărul e^x . Șirul de matrice $u_m(B)$ este evident convergent, deoarece șirurile numerelor de pe diagonală sunt convergente și anume, limita acestui șir de matrice este:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Așadar seria de matrice : $I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$ este convergentă și suma acestei serii, pe care o notăm e^A este:

$$e^A = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Analog,

$$\sin A = \frac{1}{1!}A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \dots = T \begin{pmatrix} \sin \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$$

L.V.2.3 Simetrii, proiecții, sume directe

În paragraful anterior am stabilit o clasă de operatori de structură simplă: cei care au n valori proprii distincte. Nu toți operatorii îndeplinesc această condiție, din două motive:

- în cazul când corpul scalarilor nu este algebric închis polinomul caracteristic nu are întotdeauna toate rădăcinile în acest corp, nu se descompune în factori de gradul întâi;
- chiar dacă polinomul caracteristic se descompune în factori liniari, s-ar putea ca unele rădăcini să fie multiple.

În cele ce urmează vom prezenta unele clase de operatori care, deși au valori proprii multiple sunt de structură simplă.

Simetrie

Se numește *simetrie* a spațiului vectorial V peste corpul K un operator liniar f care are proprietatea că $f^2 = I_V =$ aplicația identică a spațiului V . Această proprietate mai este numită și *involuție*.

Dacă λ este o valoare proprie a unui astfel de operator, atunci λ^2 este valoare proprie a operatorului I_V , adică a matricei I_n . Dar toate valorile proprii ale matricei I_n sunt egale cu 1. Rezultă $\lambda^2 = 1$ adică toate valorile proprii ale lui f sunt egale cu 1 sau cu -1 .

Propoziție

Orice simetrie este un operator de structură simplă.

Demonstrație

Fie f o simetrie a spațiului V . Să notăm V_1 spațiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$ și V_{-1} spațiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = -1$. Pentru orice $x \in V$ este îndeplinită egalitatea:

$$x = x_1 + x_2; \quad x_1 = \frac{1}{2}(f(x) + x), \quad x_2 = -\frac{1}{2}(f(x) - x).$$

Deoarece $f^2(x) = x$, rezultă că:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{2}(f^2(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(x + f(x)) = x_1; f(x_2) = \\ &= -\frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - x) = -x_2, \end{aligned}$$

adică $x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$. Înseamnă că $V = V_1 + V_2$.

În plus, suma este directă. Într-adevăr, dacă $x \in V_1 \cap V_2$, atunci din $x \in V_1$ rezultă $f(x) = x$, iar din $x \in V_2$ rezultă $f(x) = -x$. Deci $f(x) = \theta$ de unde: $x = f(x) = f(\theta) = \theta$.

O bază a lui V_1 este formată din vectori proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$, iar o bază a lui V_2 este formată din vectori proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = -1$. Deoarece suma $V = V_1 + V_2$ este directă, punând la un loc bazele celor două subspații se obține o bază a spațiului V . Deci există o bază formată din vectori proprii. Q.E.D.

Interpretare geometrică

Fie $\blacktriangleright$ = spațiul real tridimensional al vectorilor fizici reprezentați de săgeți și presupunem că pentru o simetrie f a spațiului, subspațiul V_1 are dimensiunea doi, adică se identifică cu un plan, iar V_{-1} are dimensiunea egală cu unu, fiind generat de un vector v .

Vectorii din planul V sunt lăsați pe loc de către f , pe când cei colineari cu v sunt transformați în opușii lor. Dacă fixăm punctul O ca sursă a tuturor săgeților, vectorii se identifică cu punctele spațiului, vectorii de poziție ai punctelor spațiului.

Aplicația f transformă punctele spațiului în simetricele lor față de planul V_1 , dar în direcția vectorului v . Dacă v este perpendicular pe planul V_1 , atunci avem de-a face cu simetria propriu zisă (ortogonală) față de planul V_1 .

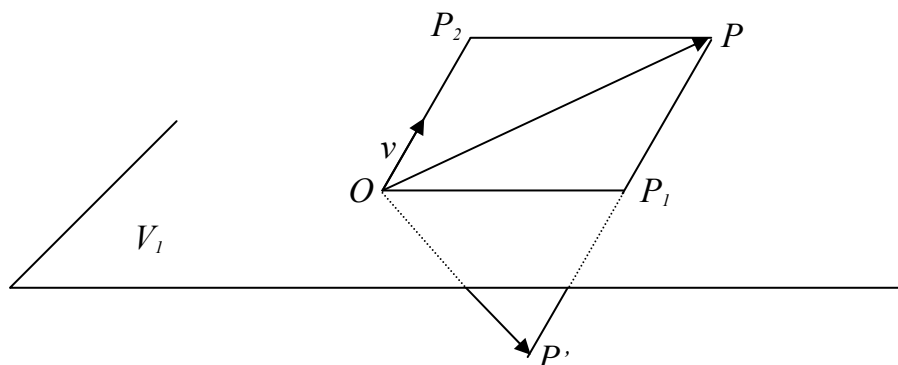


Fig. 5.1

Proiecții

Numim *proiecție* a spațiului vectorial V peste corpul K un operator liniar f având proprietatea $f^2 = f$. Această proprietate este cunoscută și sub numele de *idempotență*.

Dacă λ este o valoare proprie a proiecției f și v un vector propriu corespunzător, atunci pe de o parte $f(v) = \lambda v$, iar pe de altă parte, din $f^2 = f$ rezultă $f(v) = f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$. Deci $\lambda^2 v = \lambda v$, adică $(\lambda^2 - \lambda)v = \theta$. Cum $v \neq \theta$ rezultă $\lambda^2 - \lambda = 0$ și deci sau $\lambda = 1$ sau $\lambda = 0$. Așadar orice proiecție are numai două valori proprii: 0 și 1.

Propoziție

Orice proiecție este operator de structură simplă.

Demonstrație

Să notăm V_1 subspațiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$ și V_0 subspațiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 0$.

Pentru orice $x \in V$ este îndeplinită condiția:

$$x = x_1 + x_0; \quad x_1 = f(x), x_0 = x - f(x).$$

Să observăm că $x_1 \in V_1$ și $x_0 \in V_0$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(f(x)) = f^2(x) = f(x) = x_1; \quad f(x_0) = f(x - f(x)) = \\ &= f(x) - f^2(x) = f(x) - f(x) = \theta = 0x_0 \end{aligned}$$

Înseamnă că $V = V_1 + V_0$. Să arătăm că suma este directă. Dacă $x \in V_1 \cap V_0$, atunci din $x \in V_1$ rezultă $f(x) = x$, iar din $x \in V_0$ rezultă $f(x) = \theta$. Deci $x = \theta$.

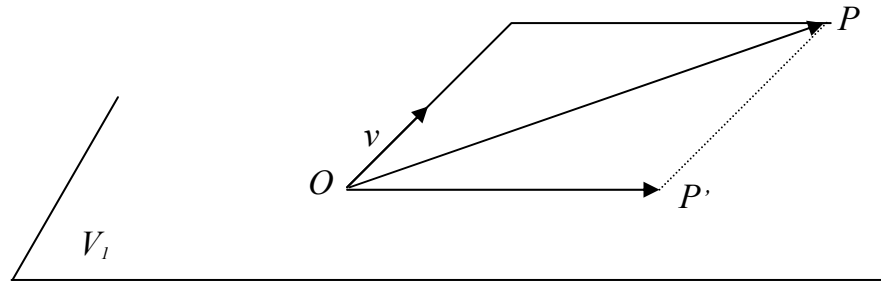
La fel ca și în cazul simetriilor, punând la un loc bazele celor două subspații, care sunt formate din vectori proprii, se obține o bază a lui V formată din vectori proprii. Q.E.D.

Interpretare geometrică

Dacă ► este spațiul tridimensional reprezentat de săgeți având sursa într-un punct fixat O proiecția va avea semnificația geometrică cunoscută.

Într-adevăr, dacă pentru o proiecție f a acestui spațiu V_1 este un plan trecând prin punctul O , iar V_0 este subspațiul generat de un vector v atunci pentru orice vector al spațiului, ca vector de poziție al unui punct oarecare P , imaginea sa prin f este exact proiecția lui P pe planul V_1 în direcția vectorului v .

Dacă vectorul v este perpendicular pe planul V_1 , atunci obținem proiecția obișnuită (perpendiculară) pe planul V_1 .



Sume directe și proiecții

Am văzut că dacă se dă o proiecție f a spațiului V , ea determină o descompunere a spațiului V în sumă directă de două subspații: $V = V_1 + V_0$.

Subspațiul V_1 este definit de ecuația vectorială $f(x) = x$, adică este subspațiul vectorilor care rămân neschimbați prin operatorul f . Convenim să numim acest subspațiu *subspațiul pe care se efectuează proiecția*.

Subspațiul $V^{-1}(\{\theta\})$ este definit de ecuația $f(x) = \theta$, adică este nucleul lui f . Este *subspațiul în direcția căruia se efectuează proiecția*.

Așa cum se observă în interpretarea geometrică există mai multe proiecții pe un subspațiu dat, de exemplu pe planul V_1 . Anume sunt atâtea proiecții câte direcții sunt neparalele cu planul V_1 . Acest lucru se poate generaliza la un spațiu oarecare.

Propoziție

Orice descompunere $V = V_1 + V_0$ în sumă directă determină proiecția f pe subspațiul V_1 în direcția subspațiului V_0 . Operatorul $g = 1_v - f$ este tot proiecție, și anume pe subspațiul V_0 în direcția subspațiului V_1 .

Demonstrație

Din definiția sumei directe orice vector x se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + x_0$, unde $x_1 \in V_1$, $x_0 \in V_0$. Definim funcția f prin: $f(x) = x_1$.

Evident că dacă $y = y_1 + y_0$ este descompunerea lui y , atunci unica descompunere a lui $x + y$ este $x + y = (x_1 + y_1) + (x_0 + y_0)$, de unde rezultă că $f(x + y) = x_1 + y_1 = f(x) + f(y)$. Pe de altă parte deoarece $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_0$ rezultă că $f(\alpha x) = \alpha x_1 + \alpha f(x)$. Așadar f este un operator liniar.

Tot din definiția sumei directe, mai precis din unicitatea scrierii lui x sub forma $x = x_1 + x_0$ cu $x_1 \in V_1, x_0 \in V_0$, rezultă că $x = x_1$ dacă și numai dacă $x \in V_1$ și $x = x_0$ dacă și numai dacă $x \in V_0$. Deci dacă $x \in V_1$, atunci $f(x) = x$, iar dacă $x \in V_0$, atunci $f(x) = \theta$.

Ca urmare, $f^2(x) = f(f(x)) = f(x_1) = x_1 = f(x)$ adică f este o proiecție. Evident că spațiul proiecției f este V_1 , iar direcția proiecției f este subspațiul V_0 .

Operatorul $g = 1_V - f$ este proiecție:

$$g^2 = (1_V - f)^2 = 1_V - 2f + f^2 = 1_V - 2f + f = 1_V - f = g.$$

Spațiul proiecției g este determinat de ecuația $g(x) = x$ adică $x - f(x) = x$, care este echivalentă cu $f(x) = \theta$ care definește direcția proiecției f . Direcția proiecției g este dată de ecuația $g(x) = \theta$, adică $x - f(x) = \theta$, care este echivalentă cu $f(x) = x$ și deci definește spațiul proiecției f . Q.E.D.

Propoziția anterioară se generalizează la descompunerea într-o sumă directă finită de subspații.

Teorema 1

Orice descompunere $V = V_1 + V_2 + \dots + V_p$ în sumă directă de subspații definește o familie de proiecții $f_1, f_2, \dots, f_p$, astfel încât:

1. Spațiul proiecției lui f_i este V_i .
2. Direcția proiecției lui f_i este subspațiul V_i' obținut prin excluderea lui V_i din suma în care este descompus întregul spațiu V .
3. $f_i \cdot f_j = 0_V$ pentru $i \neq j$.
4. $f_1 + f_2 + \dots + f_p = 1_V$.

Demonstrație.

Pe baza propoziției anterioare condițiile (1) și (2) definesc proiecțiile $f_1, f_2, \dots, f_p$.

Afirmația 3 rezultă din faptul că direcția proiecției f_i , care este nucleul lui f_i , conține spațiile de proiecție ale tuturor celorlalte proiecții.

Din definiția sumei directe orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$ cu $x_i \in V_i$. Evident, $f_i(x_i) = x_i$ și $f_i(x_j) = \theta$ pentru $i \neq j$.

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2 + \dots + f_p)(x) &= (f_1 + f_2 + \dots + f_p)(x_1 + x_2 + \dots + x_p) = \\ &= x_1 + x_2 + \dots + x_p = x. \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$

Subspații invariante

Fie f un operator liniar al spațiului vectorial V . Un subspațiu V' al lui V se numește *subspațiu invariant pentru f* dacă $f(V') \subset V'$. Așadar pentru orice $x \in V'$, $f(x) \in V'$. De exemplu, pentru orice valoare proprie λ , subspațiul V_λ este un subspațiu invariant pentru f .

Teorema 2

Fie $V = V_1 + V_2 + \dots + V_p$ o descompunere în sumă directă a lui V și f_i un operator liniar al lui V_i . Acești operatori definesc un operator liniar al lui V astfel: $f(x) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_p) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_p(x_p)$.

În aceste condiții polinomul caracteristic al lui f este produsul polinoamelor caracteristice ale operatorilor $f_1, f_2, \dots, f_p$.

Demonstrație

Să considerăm câte o bază B_i în fiecare subspațiu V_i și să notăm A_i matricea operatorului f_i în baza B_i . După cum se știe, reunind bazele B_i se obține o bază B a lui V . Din felul cum se alcătuiește matricea unui operator într-o bază dată rezultă că matricea lui f în baza B este următoarea:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}.$$

Diagonalele blocurilor A_i sunt suprapuse peste diagonala matricei A . În concluzie, atunci când se scade λ pe diagonala matricei A , el se va scade pe diagonalele tuturor blocurilor A_i . Pe de altă parte determinantul unei matrice formate din blocuri pătratice pe diagonală este produsul determinantilor acestor blocuri. Ca urmare:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(A_1 - \lambda I_{k_1}) \det(A_2 - \lambda I_{k_2}) \dots \det(A_p - \lambda I_{k_p}) = \\ &= \varphi_{A_1}(\lambda) \varphi_{A_2}(\lambda) \dots \varphi_{A_p}(\lambda) \end{aligned}$$

unde am notat $k_i = \dim V_i$. Q.E.D.

L.V.2.4 Forma canonică Jordan

Celule Jordan

Se numește *celulă Jordan* de ordinul m asociată lui λ următoarea matrice pătratică de ordinul m :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ea se poate scrie sub forma: $J_\lambda = \lambda I_m + N$ în care N este matricea pătratică de ordinul m având elementele de pe prima paralelă la diagonală principală egale cu 1 și toate celelalte elemente egale cu 0.

Ne propunem să calculăm diverse funcții analitice având ca argument o astfel de matrice, adică sumele unor serii convergente de puteri ale acestei matrice.

Începem cu puterile matricei $J_\lambda = \lambda I_m + N$. Deoarece termenii λI_m și N comută între ei, se poate aplica formula binomului lui Newton:

$$J_\lambda^k = (\lambda I_m + N)^k = \lambda^k I_m + C_k^1 \lambda^{k-1} N + C_k^2 \lambda^{k-2} N^2 + \dots + C_k^{k-1} \lambda N^{k-1} + C_k^k N^k,$$

astfel încât problema se reduce la calcularea puterilor matricei N .

Fie A o matrice pătratică oarecare de ordinul m , pe care o scriem celulată pe coloane și căutăm efectul înmulțirii la dreapta a acestei matrice cu matricea N :

$$A \cdot N = \begin{pmatrix} a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*m-1} \end{pmatrix}$$

Așadar coloanele matricei A sunt deplasate cu un pas către dreapta, iar prima coloană devine coloana nulă.

Luând în locul matricei A matricea N , vedem că efectul înmulțirii lui N cu N este deplasarea paralelei de 1, cu un pas către dreapta. Același lucru se

întâmplă dacă în locul matricei A luăm o putere a lui N , astfel că N^r va avea toate elementele egale cu zero în afară de cele de pe paralela r la prima diagonală care este ocupată cu $\mathbf{1}$. Rezultă că pentru $k \geq m$, $N^k = 0$, deci:

$$J_{\lambda}^k = \lambda^k I_m + C_k^1 \lambda^{k-1} N + C_k^2 \lambda^{k-2} N^2 + \dots + C_k^{m-1} \lambda^{k-m+1} N^{m-1}.$$

Ținând seamă de descrierea pe care am dat-o puterilor matricei N rezultă că J_{λ}^k va avea pe diagonala principală λ^k , pe prima paralelă la diagonală $C_k^1 \lambda^{k-1}$, pe a doua paralelă $C_k^2 \lambda^{k-2}$ și așa mai departe.

Pe de altă parte, notând $f(\lambda) = \lambda^k$, avem: $C_k^r \lambda^{m-r} = \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda)$. Așadar,

$$f(J_{\lambda}) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!} f'(\lambda) & \frac{1}{2!} f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(m-2)!} f^{(m-2)}(\lambda) & \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \frac{1}{1!} f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(m-3)!} f^{(m-3)}(\lambda) & \frac{1}{(m-2)!} f^{(m-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{1}{(m-4)!} f^{(m-4)}(\lambda) & \frac{1}{(m-3)!} f^{(m-3)}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{1}{1!} f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Egalitatea de mai sus este valabilă și în cazul când în locul funcției $f(\lambda) = \lambda^k$ se ia un polinom, precum și atunci când $f(\lambda)$ este o serie, cu condiția să avem asigurată convergența seriilor reprezentate de elementele matricei.

De exemplu, pentru $m = 4$ se poate scrie:

$$\sin J_{\lambda} = \frac{1}{1!} J_{\lambda} - \frac{1}{3!} J_{\lambda}^3 + \dots = \begin{pmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda & -\frac{1}{2!} \sin \lambda & -\frac{1}{3!} \cos \lambda \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & -\frac{1}{2!} \sin \lambda \\ 0 & 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sin \lambda \end{pmatrix}$$

Operatori nilpotenți

Un operator f al spațiului V se numește *operator nilpotent* dacă există un număr natural r , astfel încât $f^r = 0_V$. De exemplu, dacă matricea operatorului într-o bază a spațiului V are forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

atunci, deoarece $A^n = 0$, rezultă $f^r = 0_V$.

Propoziție

Dacă f este un operator nilpotent al spațiului V , anume $f^m = 0_V$, atunci există o bază a spațiului în care matricea J a operatorului este constituită din blocuri Jordan asociate lui $\lambda = 0$ dispuse pe diagonală, având dimensiunile $n_1, n_2, \dots, n_p$, astfel încât $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n = \dim V$.

Demonstrație

Mai întâi să remarcăm că dacă $\lambda = 0$ atunci celula Jordan.

$J_\lambda = \lambda I_m + N$ devine $J_0 = N$. Pentru $m = 1, 2, 3$ celula $J_0 = N$ va fi respectiv:

$$(0), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne propunem să găsim o bază a spațiului V în care matricea operatorului nilpotent f să aibă forma:

$$J = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_p \end{pmatrix},$$

în care N_i este o matrice de forma descrisă mai sus, având ordinul n_i .

După cum se știe coloanele matricei J a operatorului în baza căutată reprezintă coordonatele imaginilor prin f ale vectorilor acestei baze. Notând cu V_i subspațiul generat de vectorii corespunzători coloanelor ce definesc blocul N_i , rezultă că acest subspațiu este invariant față de f , iar $V = V_1 + V_2 + \dots + V_p$ este sumă directă. În plus, notând cu $v_1, v_2, \dots, v_k; k = n_i$ vectorii bazei căutate

corespunzători coloanelor blocului N_i *dispuși în ordine inversă*, aceștia îndeplinesc condițiile: $f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, \dots, f(v_{k-1}) = v_k, f(v_k) = \theta$. Așadar baza căutată trebuie să fie formată din grupuri de vectori de forma: $v, f(v), f^2(v), \dots, f^{k-1}(v)$, în care $k = n_i - 1$.

Reamintim că dacă A este matricea operatorului f într-o bază oarecare și B este coloana coordonatelor unui vector $b \in V$ atunci mulțimea $f^{-1}(b)$ se determină rezolvând sistemul liniar $AX = B$: orice coloană X care verifică sistemul este constituită din coordonatele unui vector $x \in f^{-1}(b)$. În particular, $\text{Ker}f = f^{-1}(\theta)$ se obține rezolvând sistemul omogen $AX = 0$. În plus,

$$\dim \text{Ker}f = n - \text{rang } A.$$

Din inegalitățile: $\text{rang}A \geq \text{rang}A^2 \geq \dots \geq \text{rang}A^m = 0$ rezultă atunci: $\dim \text{Ker}f \leq \dim \text{Ker}f^2 \leq \dots \leq \dim \text{Ker}f^m = n$. Pe de altă parte este evident că :

$$f^{-1}(\text{Ker}f^{r-1}) = \text{Ker}f^r.$$

Pe baza celor de mai sus putem elabora programul de construire a bazei căutate. În primul rând se calculează $\text{Ker}f$ rezolvând sistemul $AX = 0$. Soluția generală $X = B_1$ va avea atâția parametri cât este dimensiunea lui $\text{Ker}f$, adică gradul de nedeterminare al sistemului.

Pentru calculul vectorilor lui $\text{Ker}f^2$ care nu sunt în $\text{Ker}f$ avem de rezolvat sistemul $AX = B$, un sistem liniar și neomogen de astă dată. Pentru uniformitatea construcției care urmează notăm $U'_0 = \text{Ker}f$.

Condițiile de compatibilitate ale sistemului, exprimate în relații liniare ale parametrilor coloanei B , vor determina un subspațiu, al lui $U'_0 = \text{Ker}f$, pe care-l notăm U_1 . În acest subspațiu alegem o bază pe care o completăm până la o bază a lui $U'_0 = \text{Ker}f$ cu vectorii (proprii) $u_1, u_2, \dots, u_p$. Aceștia sunt vectori proprii liniar independenți, care nu au preimage (image inversă). Nu există nici un vector x astfel încât $f(x)$ să fie o combinație liniară a acestora. Fiecare din vectorii $u_1, u_2, \dots, u_p$ va defini o celulă Jordan de dimensiune unu.

Pentru fiecare vector u al bazei lui U_1 alegem o soluție a ecuației $f(x) = u$, rezolvând sistemul corespunzător $AX = B_1$ în care B_1 este coloana coordonatelor lui u . Acești vectori generează un subspațiu U'_1 care are aceeași dimensiune ca și U_1 . Este ușor de verificat că aceste soluții (vectori) împreună cu vectorii bazei lui $\text{Ker}f$ constituie un sistem liniar independent, și anume o bază a subspațiului $\text{Ker}f^2$. Notăm B_2 coloana coordonatelor unui vector

oarecare din subspațiul U'_1 . Coloana B_2 va avea atâția parametri cât este dimensiunea lui U_1 , care este egală cu dimensiunea lui U'_1 .

Pasul următor, de determinare a subspațiului $\text{Ker}f^3 = f^{-1}(\text{Ker}f^2)$ este în principiu asemănător celui care a dus la determinarea lui $\text{Ker}f^2$.

Condițiile de compatibilitate ale sistemului $AX = B_2$ care sunt relații liniare între parametrii care definesc coloana B_2 , vor determina un subspațiu, U_2 al lui U'_1 , în care alegem o bază pe care o completăm până la o bază a lui U'_1 cu vectorii: $v_1, v_2, \dots, v_q$. Nici o combinație liniară a acestor vectori nu are preimagine. Fiecare din acești vectori v_i determină subspațiul bidimensional generat de vectorii liniar independenți v_i și $f(v_i)$, care vor defini o celulă Jordan bidimensională. Vor fi q celule bidimensionale, tot așa cum vectorii $u_1, u_2, \dots, u_p$ definesc cele p celule unidimensionale.

Fiecare vector al bazei lui U_2 definește matricea coloană B_2 corespunzătoare.

Alegem câte o soluție a sistemului $AX = B_2$. Aceste soluții generează subspațiul U'_2 care are aceeași dimensiune ca și U_2 . Notăm B_3 coloana coordonatelor unui vector oarecare din U'_2 . Coloana B_3 va avea atâția parametri cât este dimensiunea lui U'_2 . Se trece apoi la etapa următoare pentru determinarea celulelor Jordan de dimensiune trei etc.

După fiecare etapă numărul parametrilor coloanei B_{i+1} , care este egal cu dimensiunea subspațiului U_i scade cu atâtea unități, cu cât se diminuează dimensiunea lui U_i față de U'_i , adică cu numărul celulelor de dimensiune i . Se pornește de la $\dim U'_0 = \dim \text{Ker} f$. Q.E.D.

Teorema de descompunere a lui Jordan

Pentru orice operator linear f al spațiului V peste un corp algebric închis K există o bază în care matricea operatorului are forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_p} \end{pmatrix},$$

în care $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sunt valorile proprii, nu neapărat distincte ale operatorului f , iar J_{λ_i} este celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii λ_i .

Demonstrație

Fie A matricea operatorului f într-o bază a spațiului V și

$$\varphi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r},$$

polinomul caracteristic al operatorului f . Valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sunt distincte, având respectiv multiplicitățile $m_1, m_2, \dots, m_r$, astfel încât $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$.

Descompunerea în factori liniari a polinomului caracteristic se bazează pe faptul că, prin ipoteză, corpul K este algebric închis.

Notăm $g_i(\lambda) = \frac{\varphi_A(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}}$; $i = 1, 2, \dots, r$. Deoarece aceste polinoame sunt

prime între ele există polinoamele $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda)$, astfel încât:

$$h_1(\lambda)g_1(\lambda) + h_2(\lambda)g_2(\lambda) + \dots + h_r(\lambda)g_r(\lambda) = 1.$$

În polinomul din membrul stâng și în cel din membrul drept se poate înlocui variabila λ cu o matrice pătratică, reținând faptul că termenul liber se înmulțește cu matricea unitate. Înlocuim pe λ cu matricea A :

$$h_1(A)g_1(A) + h_2(A)g_2(A) + \dots + h_r(A)g_r(A) = I_n.$$

Înmulțind la dreapta cu o matrice coloană X oarecare de ordinul n , obținem:

$$h_1(A)g_1(A)X + h_2(A)g_2(A)X + \dots + h_r(A)g_r(A)X = X.$$

Interpretăm coloana X ca fiind alcătuită din coordonatele unui vector oarecare x în baza considerată, iar coloana $h_i(A)g_i(A)X$ coloana coordonatelor unui vector x_i .

Coloana coordonatelor vectorului $(f - \lambda_i 1_V)^{m_i}(x_i)$ este:

$$(A - \lambda_i I_n)^{m_i} h_i(A)g_i(A)X = h_i(A)(A - \lambda_i I_n)^{m_i} g_i(A)X = h_i(A)\varphi_A(A)X = 0,$$

unde am ținut seamă de faptul că matricele $h_i(A)$ și $g_i(A)$ comută și că:

$$(\lambda - \lambda_i)^{m_i} g_i(\lambda) = \varphi_A(\lambda).$$

Așadar $(f - \lambda_i 1_V)^{m_i}(x_i) = 0$, adică $x_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i 1_V)^{m_i}$. Notăm

$$V_i = \text{Ker}(f - \lambda_i 1_V)^{m_i}$$

Am obținut faptul că orice vector x al spațiului V se scrie sub forma:

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_r$; $x_i \in V_i$, adică $V = V_1 + V_2 + \dots + V_r$. Să arătăm că această sumă este directă.

Fie $x_1 + x_2 + \dots + x_r = \theta$ cu $x_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i 1_V)^{m_i}$. Vom arăta că toți termenii sunt nuli. Anume, vom arăta că $x_1 = \theta$. Notăm $x = x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_r$.

Deoarece polinoamele :

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \text{ și } k(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^{m_2} (\lambda - \lambda_3)^{m_3} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

sunt prime între ele, rezultă că există polinoamele $u(\lambda)$ și $v(\lambda)$ astfel încât:

$$u(\lambda)h(\lambda) + v(\lambda)k(\lambda) = 1.$$

Înlocuind pe λ cu A în această egalitate și înmulțind ambii membri cu coloana X a coordonatelor vectorului x , obținem:

$$X = u(A)h(A)X + v(A)k(A)X$$

Dar $h(A)X = 0$ deoarece $x = x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1 1_V)^{m_1}$.

Observăm că matricele produsului:

$$k(A) = (A - \lambda_2 I_n)^{m_2} (A - \lambda_3 I_n)^{m_3} \dots (A - \lambda_r I_n)^{m_r} \text{ comută.}$$

Pentru fiecare $j = 2, 3, \dots, r$ notând X_j coloana coordonatelor vectorului $x_j \in \text{Ker}(f - \lambda_j 1_V)^{m_j}$ este îndeplinită condiția: $(A - \lambda_j I_n)^{m_j} X_j = 0$. Rezultă: $k(A)X = (A - \lambda_2 I_n)^{m_2} (A - \lambda_3 I_n)^{m_3} \dots (A - \lambda_r I_n)^{m_r} (-X_2 - X_3 - \dots - X_r) = 0$.

Așadar, $X = u(A)h(A)X + v(A)k(A)X = 0$ adică $x = \theta$.

Arătăm acum că subspațiile V_i sunt invariante față de f . Într-adevăr, dacă $x \in V_i$ atunci notând X matricea coloană a coordonatelor vectorului x , obținem:

$$(A - \lambda_i I_n)^{m_i} AX = A(A - \lambda_i I_n)^{m_i} X = A, \quad 0_n = 0_n$$

adică $f(x) \in V_i$, ceea ce înseamnă că subspațiul V_i este invariant față de f .

Notând f_i restricția operatorului f la V_i , această restricție este deci un operator al lui V_i . Dacă x este un vector propriu al lui f_i , atunci este vector propriu și pentru f și deci trebuie să corespundă uneia din valorile proprii ale lui f . Presupunând că x este vector propriu corespunzător valorii proprii λ_j cu $j \neq i$, deducem că $x \in V_i \cap V_j = \{\theta\}$, adică $x = \theta$, ceea ce este o contradicție. În concluzie, singura valoare proprie a lui f_i este λ_i și deci polinomul caracteristic al lui f_i este de forma $\varphi_i(\lambda) = (-1)^{n_i} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

Pe de altă parte, deoarece suma $V = V_1 + V_2 + \dots + V_r$ este directă, potrivit unei teoreme din paragraful anterior, rezultă că polinomul caracteristic al lui f

este produsul polinoamelor caracteristice ale operatorilor f_i . Rezultă că $\varphi_i(\lambda) = (-1)^{m_i} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$.

Observăm că operatorul $g_i = f_i - \lambda_i 1_{V_i}$ este nilpotent deoarece $g_i^{m_i}$ este nul pe V_i . Putem deci aplica propoziția anterioară și obținem o bază a lui V_i în care matricea lui g_i este constituită din blocuri Jordan plasate pe diagonală, toate corespunzătoare valorii proprii $\lambda = 0$. În aceeași bază matricea lui $f_i = g_i + \lambda_i 1_{V_i}$ se obține din matricea lui g_i căreia i se plasează λ_i pe diagonală, adică se obțin celule Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda = \lambda_i$. Bazele spațiilor astfel obținute, puse la un loc, vor forma baza căutată a lui V . Q.E.D.

L.V.2.5 PROBLEME PROPUSE

PP.V.2.5.1 Să se determine polinomul caracteristic, valorile proprii și vectorii proprii ale următoarelor endomorfisme:

a) $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1, x_2) = (-2x_1 + 5x_2, x_1 + 2x_2)$;

b) $T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 - x_3)$;

c) $T_3: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $T_3(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + (1+i)z_2, (1-i)z_1 + z_2 - iz_3, iz_2 + z_3)$.

PP.V.2.5.2 Fie endomorfismul: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definit astfel:

$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 5x_2 + 7x_3, x_1 - 4x_2 + 9x_3, -4x_1 + 5x_3)$.

a) Să se determine subspațiile invariante corespunzătoare valorilor proprii și câte o bază pentru fiecare subspațiu;

b) Să se arate că vectorii care generează aceste subspații formează o bază a lui $\mathbb{R}^3$ și să se scrie matricea endomorfismului în această bază.

PP.V.2.5.3 Fie $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfism și λ o valoare proprie a sa. Să se arate că endomorfismul T^2 admite pe λ^2 ca valoare proprie.

PP.V.2.5.4 Să se determine valorile proprii, vectorii proprii și să se cerceteze dacă matricele următoare pot fi diagonalizate:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

În fiecare caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare T și forma diagonală a matricei date.

PP.V.2.5.5 Să se determine valorile proprii, vectorii proprii și să se cerceteze dacă matricele asociate endomorfismelor următoare sunt jordanizabile:

$$\text{a) } A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine bazele față de care endomorfismele au forma canonică Jordan, matricele de jordanizare și forma canonică Jordan în fiecare caz.

L.V.2.6 TEST DE AUTOEVALUARE

TAev.V.2.6.1 Să se determine polinomul caracteristic, valorile proprii, vectorii proprii precum și multiplicitățile algebrice și geometrice ale valorilor proprii pentru următoarele endomorfisme:

$$\text{a) } T_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, T_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 - 6x_3 - 2x_4, 2x_2, x_1 + 3x_3, 2x_4);$$

$$\text{b) } T_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, T_2(z_1, z_2) = ((3+i)z_1 - z_2, 2iz_1 + (1-i)z_2);$$

$$\text{c) } T_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4;$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 2x_4, 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4, 3x_3 - 2x_4, \\ 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

TAev.V.2.6.2 Să se stabilească dacă endomorfismele următoare sunt diagonalizabile sau nu și în caz afirmativ să se găsească o bază în care acestea au forma diagonală:

$$\text{a) } T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 3x_2 + 2x_3, 6x_1 - 4x_2 + 4x_3, 4x_1 - 4x_2 + 5x_3);$$

$$\text{b) } T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 4x_3, 4x_1 - 7x_2 + 8x_3, 6x_1 - 7x_2 + 7x_3);$$

$$\text{c) } T_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

TAev.V.2.6.3 Să se determine bazele față de care endomorfismele următoare au forme canonice (diagonală sau Jordan):

$$\text{a) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

TAev.V.2.6.4 Transformarea liniară $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ este definită în baza canonică a spațiului vectorial $\mathbb{R}^4$ prin matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Să se calculeze valorile proprii, multiplicitatea lor algebrică și geometrică și vectorii proprii ai endomorfismului T ;

b) Să se determine subspațiile invariante nebanale ale lui T ;

c) Să se determine baza față de care endomorfismul T are forma canonică Jordan precum și forma canonică Jordan a sa.

TAev.V.2.6.5 Se dau vectorii: $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 2, 1), v_3 = (2, 3, 2)$.

a) Să se determine transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, având valorile proprii $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$ și vectorii proprii v_1, v_2, v_3 ;

b) Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru transformarea liniară $U = T^2 - 9I$, unde I este transformarea identică;

c) Pentru ce valori α, β, γ avem: $T^3 + \alpha T^2 + \beta T + \gamma I = 0$?

M.V - TEMĂ DE CONTROL

TC.V.1 Fie spațiile vectoriale reale: $V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$ și $W = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ derivabilă}\}$. Să se arate că funcția

$P : V \rightarrow W, g = P(f), g(x) = \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b$, este liniară (Trecerea la

integrala nedefinită sau primitivă). Să se cerceteze dacă aplicația liniară P este injectivă și surjectivă.

TC.V.2 a) Fie V spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale reale și endomorfismele:

$$D: V \rightarrow V, D(f) = f' \text{ și } P: V \rightarrow V, P(f(x)) = \int_0^x f(t) dt, a \leq x \leq b.$$

Să se arate că $D \circ P = \text{id}_V$, dar D nu este o bijecție.

b) Fie V un K -spațiu vectorial și $T: V \rightarrow V$ un endomorfism. Să se arate că $\text{Ker}(T)$ și $\text{Im}(T)$ sunt invariante în raport cu T .

TC.V.3 Fie endomorfismul $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dat prin matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

în raport cu baza $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)$. Să se arate că vectorii $w_1 = (1, 2, 3), w_2 = (2, 1, 3), w_3 = (1, 1, 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$, să se determine matricea de trecere de la baza $\{v_1, v_2, v_3\}$ la baza $\{w_1, w_2, w_3\}$ și apoi matricea lui T în raport cu baza $\{w_1, w_2, w_3\}$.

TC.V.4 Spațiul vectorial V este suma directă a subspațiilor V_1 și V_2 , adică $V = V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \text{ iar } v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 0, v_2 = 0\}$. Să se arate că operatorul $P \in L(V)$, $L(v) = v_1$ dacă $v = v_1 + v_2$, numit operatorul de proiecție paralelă cu V_2 a spațiului V pe V_1 este operator liniar și că $P^2 = P$.

TC.V.5 Fie $\mathbb{R}_2[X]$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult 2 și aplicațiile:

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X], A(v) = (2v_1 + v_2 + v_3) + (v_1 - 2v_2 + v_3)X + (v_1 + v_2 - 2v_3)X^2$$

$D: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], D(P) = P'$, unde $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ și P' este derivata polinomului $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Să se arate că A și D sunt transformări liniare;
- Să se arate că A este inversabilă și să se construiască inversa sa;
- Să se determine transformarea produs $D \circ A$ și matricea acesteia în bazele canonice din $\mathbb{R}^3$ și $\mathbb{R}_2[X]$.

TC.V.6 Fie $T: V \rightarrow U$ un operator liniar, unde V, U sunt K -spații vectoriale de dimensiune n , respectiv m . Să se arate că:

- $\dim V = \dim \text{Ker} T + \dim \text{Im} T$;
- T este surjectiv $\Leftrightarrow \dim \text{Im} T = \dim U$;
- T este injectiv $\Leftrightarrow \dim \text{Ker} T = 0$.

TC.V.7 Să se determine polinomul caracteristic, valorile proprii, vectorii proprii precum și multiplicitățile algebrice și geometrice ale valorilor proprii pentru următoarele endomorfisme:

a) $T_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $T_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)$;

b) $T_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$,

$$T_2(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1 + z_2 + z_3, z_1 + e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot z_2 + e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot z_3, z_1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot z_2 + e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot z_3 \right)$$

c) $T_3 : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, $T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, 0, x_1 + x_4)$;

d) $T_4 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $T_4(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -4x_1 + 4x_2, -2x_1 + x_2 + 2x_3)$.

TC.V.8 Fie endomorfismul: $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, definit astfel:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4, 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 + x_3)$$

a) Să se determine polinomul caracteristic, valorile proprii și vectorii proprii ai endomorfismului;

b) Să se determine matricea A a endomorfismului în baza canonică;

c) Să se determine o bază a lui $\mathbb{C}^4$ în care matricea A a endomorfismului să aibă forma Jordan ($J = T^{-1} \cdot A \cdot T$);

d) Să se calculeze J^n și A^n , unde $n \in \mathbb{N}$.

TC.V.9 Să se determine valorile proprii, vectorii proprii și să se cerceteze dacă matricele următoare pot fi diagonalizate:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

În fiecare caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare T și forma diagonală a matricei date.

TC.V.10 Să se determine valorile proprii, vectorii proprii și să se cerceteze dacă matricele asociate endomorfismelor următoare sunt jordanizabile:

a) $A : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

$$\begin{aligned} \text{a) } B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, B &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \\ \text{b) } C: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Să se determine bazele față de care endomorfismele au forma canonică Jordan, matricele de jordanizare și forma canonică Jordan în fiecare caz.

Bibliografie

1. Udriște C., ș.a., *-Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
2. Ion D.I., R. Nicolae, *-Algebra*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
3. Flondor D., N. Donciu, *-Algebră și analiză matematică-culegere de probleme*, vol I Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
4. Otlăcan E., *-Algebră superioară-îndrumar teoretic și culegere de probleme*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1995.
5. Mânzatu E., Gârban V. *-Algebră cu aplicații rezolvate la calculatorul electronic*, Editura Academiei Militare, București, 1982.