UNIVERSITATEA **TITU MAIORESCU**

Facultatea de INFORMATICĂ

Conf. univ. dr.

VALENTIN GÂRBAN

ALGORITMICA GRAFURILOR

Curs pentru învăţământul la distanţă

editura universităţii Titu Maiorescu

BUCUREŞTI – 2015

CUPRINS

UNIVERSITATEA TITU MAIORESCU, BUCUREŞTI
Facultatea de Informatică
Învăţământ la Distanţă

ALGORITMICA GRAFURILOR

Algoritmica grafurilor este una din disciplinele de pregătire fundamentală care, pentru profilul INFORMATICĂ, este impusă de către Agenţia Naţională pentru Asigurarea Calităţii în Învăţământul Superior (ARACIS) fiind esenţială pentru pregătirea studenţilor şi pentru depăşirea procedurilor de evaluare şi acreditare. Modul de prezentare a acestui material are în vedere particularităţile învăţământului la distanţă, la care studiul individual este determinant. Pentru orice nelămuriri faţă de acest material vă rugăm să contactaţi tutorele de disciplină care are datoria să vă ajute oferindu-vă toate explicaţiile necesare.

Disciplina **Algoritmica grafurilor** îşi propune următoarele **obiective specifice:**

- Însuşirea noţiunilor fundamentale din domeniile teoriei grafurilor şi combinatoricii.
- Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură informatică, tehnică sau economică, cu utilizarea cunoştinţelor însuşite.
- Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
- Formarea şi dezvoltarea aptitudinilor şi deprinderilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată, în rezolvarea problemelor tehnico-economice şi de specialitate;
- O comparaţie critică a metodelor de rezolvare evidenţiind, eventual, calea optimă de soluţionare.

Cunoştinţele şi competenţele dobândite de către studenţi prin însuşirea conţinutului cursului **Algoritmica grafurilor** sunt des folosite la disciplinele de specialitate care vor fi studiate în anii următori, precum: *Algoritmi şi structuri de date, Probabilităţi şi statistică matematică, Tehnici avansate de programare*, *Reţele de calculatoare, Administrarea reţelelor de calculatoare,* etc. O neînţelegere a noţiunilor fundamentale prezentate în acest curs poate genera dificultăţi în asimilarea conceptelor mai complexe ce vor fi introduse în aceste cursuri de specialitate.

Competenţele specifice disciplinei **Algoritmica grafurilor** se pot clasifica astfel:

Competenţe generale	**1. Competenţe instrumentale** • Capacitatea de a defini, distinge şi identifica noţiuni, elemente, principii, reguli, relaţii în modele teoretice ale teoriei grafurilor şi în situaţii teoretice ale altor discipline, pentru care se pot adopta modele ale teoriei grafurilor. • Capacitatea de a identifica şi soluţiona probleme care se modelează cu ajutorul algoritmilor specifici teoriei grafurilor, aplicând cunoştintele şi metodele actuale de studiu din acest domeniu. • Cunoştinţe, priceperi, deprinderi, strategii de bază ale teoriei grafurilor necesare integrării sociale printr-o profesie din domeniul Informaticii şi realizării mobilităţii profesionale specifice.
	2. Competenţe interpersonale • Capacitatea de a-şi regla şi armoniza repertoriul de comunicare (structuri mentale capabile să recepteze conţinuturi ale teoriei grafurilor, limbaj propriu teoriei) cu cel al profesorului, al specialistului.

	Capacitatea de a propune, a specifica, a modifica, a dezvolta, a critica, structuri, idei ale conţinuturilor în participarea la activităţile didactice şi de cercetare. • Capacitatea de evaluare şi autoevaluare. • Capacitatea de a colabora în soluţionarea situaţiilor problema. • Abilitatea de a colabora cu specialişti/experţi din alte domenii. • Capacitatea de a lucra în echipă.
	3. Competenţe sistemice • Capacitatea de a formaliza probleme generate de practică în termenii teoriei grafurilor şi combinatoricii. • Capacitatea de transpune şi utiliza conţinuturile însuşite în alte domenii ale informaticii. • Capacitatea de a crea, a produce, a combina, a deriva prin metode specifice ale teoriei grafurilor, conţinuturi care să răspundă unor probleme proprii disciplinei şi unor probleme interdisciplinare. • Formarea şi dezvoltarea deprinderilor şi aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată în soluţionarea problemelor de natură matematică şi de specialitate, precum şi formarea şi dezvoltarea unui raţionament riguros şi a abilităţilor de calcul rapid şi corect necesare pentru diferite aplicaţii. • Abilitatea de a lucra independent. • Abilităţi de documentare, căutare pe internet.
Competenţe specifice disciplinei	**1. Cunoaştere şi înţelegere** • Cunoaşterea noţiunilor, ideilor şi conceptelor fundamentale cu care operează combinatorica şi teoria grafurilor. • Observarea activă, explorarea fenomenului sau procesului studiat, identificarea semnificaţiilor convenţionale, cu echivalente formale, ale elementelor componente şi ale relaţiilor dintre ele. • Elaborarea de reprezentări în descrierea desfăşurării fenomenului sau procesului studiat, şi a unor aspecte calitative şi cantitative ale manifestării acestuia.
	2. Explicare şi interpretare • Exprimarea proprie a cunoştinţelor fundamentale ale teoriei grafurilor, prelucrate şi integrate în sistemul individual de cunoştinţe. • Categorisirea fenomenelor şi proceselor studiate după similarităţi cu modelele teoretice clasificate.
	3. Instrumental - aplicative • Utilizarea rezultatelor teoretice ce privesc teoria grafurilor şi combinatoricii în descrierea calitativa şi determinarea unor caracteristici cantitative ale procesului sau fenomenului studiat. • Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură tehnico-inginerească în general şi de informatică în special, cu utilizarea cunoştinţelor însuşite din domeniile teoriei grafurilor şi combinatoricii.
	4. Atitudinale • Orientarea studiului teoriei grafurilor şi combinatoricii, a participării la activităţile didactice, către rezultate „deziderat", măsurabile relativ la standarde cunoscute. • Dezvoltarea unei gândiri sistemice privind aplicaţiile specifice de modelare şi simulare matematică, având la bază rezultate ale teoriei grafurilor şi combinatoricii.

Structura cursului este următoarea:

Unitatea de învăţare 1 - Elemente de combinatorică
Unitatea de învăţare 2 - Studiul grafurilor cu ajutorul matricelor booleene asociate
Unitatea de învăţare 3 - Grafuri cu arce valorizate. Algoritmi de optimizare

Este foarte important ca parcurgerea materialului sa se facă în ordinea unităţilor de învăţare incluse (1 – 3). Fiecare UI (unitate de învăţare) conţine, pe lângă prezentarea noţiunilor teoretice, şi exerciţii rezolvate, activităţi de lucru individual cu indicaţii de rezolvare şi exemple, iar la sfârşitul fiecărei lecţii, un test de autoevaluare. În plus, la sfârșitul fiecărei UI sunt incluse probleme propuse care testează cunoaşterea noţiunilor teoretice de catre student, precum şi temele de control prevăzute în calendarul disciplinei. Materialul a fost elaborat astfel incat algoritmii prezentati să poată fi implementaţi şi într-un limbaj de programare, recomandabil fiind limbajul C care se studiază în anul I.

Vă precizăm de asemenea că, din punct de vedere al verificărilor şi al notării, cu adevărat importantă este capacitatea pe care trebuie să o dobândiţi şi să o probaţi de a rezolva toată tipologia de probleme aplicative aferente materialului teoretic prezentat în continuare. De aceea vă recomandăm să parcurgeţi cu atenţie toate problemele rezolvate, să rezolvaţi problemele propuse din testele de autoevaluare si temele de control; fiţi convinşi că examenul final apelează la tipurile de probleme prezente în secţiunile menţionate anterior.

Prezentăm în continuare criteriile de evaluare şi ponderea fiecărei activităţi de evaluare la stabilirea notei finale.

La stabilirea notei finale se iau în considerare:	Ponderea în notare, exprimată în % {Total = 100%}
- răspunsurile la examen / colocviu (evaluarea finală)	70%
- testarea periodică prin lucrări de control	20%
- testarea continuă pe parcursul semestrului şi participarea la activitatile didactice	10%

Modalitatea practică de evaluare finală – Examen, constând în:

- Lucrare scrisă descriptivă, constând din 3-4 subiecte, fiecare conţinând 1-2 chestiuni teoretice (enunţ şi demonstraţie) şi 2-3 probleme.

Cerinţe minime pentru nota 5	Cerinţe pentru nota 10
• Însuşirea cunoştinţelor de bază • Obţinerea unui număr de 5 puncte din totalul de 10 repartizat pentru diferite categorii de subiecte • Activitate în timpul semestrului • Participarea la minimum 14 ore de curs si la 8 ore de seminar.	• Rezolvarea corectă şi completă a subiectelor de examen • Participarea activă la toate orele de seminar şi la toate orele de curs. • Obţinerea punctajului de minim 90 % la lucrările de control • Rezolvarea temelor anunţate la seminar, respectiv conţinute în temele de control şi testele de autoevaluare.

În dorinţa de ridicare continuă a standardelor desfăşurării activităţilor dumneavoastră, după parcurgerea fiecărei unităţi de învăţare vă rugăm să completaţi un formular de feedback şi să-l transmiteţi îndrumatorului de an. Acest formular se gaseşte la sfârsitul acestui material

SUCCES!

Coordonator disciplină: Conf. univ. dr. Valentin GÂRBAN
Tutori: Asist. univ. drd. Veronica ZANFIR, Asist. univ. Roxana DONCEA

UNITATEA DE ÎNVĂŢARE NR. 1

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

Obiective urmărite:

1. Însuşirea noţiunilor fundamentale din domeniul combinatoricii.
2. Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
3. Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură informatică, tehnică sau economică, cu utilizarea cunoştinţelor însuşite.

Rezumat:

În această unitate de învăţare sunt prezentate, în Lecţia 1, principalele noţiuni cu care operează Combinatorica: mulţimi ordonate, permutări, aranjamente, combinări şi aplicaţii ale lor. Este pusă în evidenţă şi legătura dintre aceste noţiuni şi aplicaţiile bijective, injective şi crescătoare sau descrescătoare definite pe o mulţime finită, cu valori într-o mulţime finită . De fapt materialul prezentat în Lectia 1 poate fi privit şi ca o reluare la un nivel superior a acestor cunoştinţe studiate în ciclul liceal, din dorinţa de a actualiza şi uniformiza aceste cunoştinţe la toţi studenţii, dat fiind că aceştia au absolvit liceul la profile diferite, în fiecare profil insistându-se în mod diferenţiat asupra acestor noţiuni, atât ca ca timp alocat cât şi ca grad de complexitate, conform programei fiecărui profil.

În Lecţia 2 a acestei unităţi de învăţare sunt prezentate generalizările naturale ale conceptelor prezentate în Lecţia 1, respectiv permutări cu repetiţie, aranjamente cu repetiţie, combinări cu repetiţie, precum şi câteva aplicaţii ale acestora, lăsând totodată câmp deschis utilizării tuturor noţiunilor din această unitate în celelalte unităţi de învăţare ale disciplinei, precum şi în cadrul altor discipline din planul de învăţământ care se vor studia în semestrele următoare (ex: Teoria probabilităţilor şi statistică matematică).

Cuvinte cheie:

Multime ordonată, permutări, aranjamente, combinări, permutări cu repetiţie, aranjamente cu repetiţie, combinări cu repetiţie, funcţii injective, surjective, bijective, crescătoare, descrescătoare şi oarecare definite pe o mulţime finită, cu valori într-o mulţime finită.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar însuşirii noţiunilor teoretice, formării deprinderilor de calcul şi utilizării algoritmilor de rezolvare a problemelor specifice Combinatoricii este estimat la aproximativ 2-3 ore pentru fiecare din cele două lecţii ale unităţii de învăţare. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare şi a Temelor de control

LECŢIA 1 - ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

În practică se ajunge uneori la problema de a alege, dintr-o mulţime oarecare de obiecte, submulţimi de elemente caracterizate prin anumite proprietăţi, de a aşeza elementele uneia sau ale mai multor submulţimi într-o anumită ordine etc. Poate apărea, de asemenea, problema determinării numărului tuturor submulţimilor unei mulţimi, constituite după anumite reguli, sau a numărului tuturor funcţiilor definite pe o mulţime formată din *n* elemente, cu valori într-o mulţime cu *m* elemente etc.

Deoarece în astfel de probleme se operează cu anumite combinaţii de obiecte, ele se numesc probleme combinatorii, iar domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numeşte combinatorică.

Combinatorica poate fi considerată ca o parte a teoriei mulţimilor, orice problemă de combinatorică putând fi redusă la o problemă de mulţimi finite şi aplicaţii. Această ramură a matematicii are mare importanţă în teoria probabilităţilor, ciberneticii, logica matematică, teoria numerelor, dar şi în diverse ramuri ale ştiinţei şi tehnicii.

În toate problemele de care ne vom ocupa în acest capitol vom lucra numai cu mulţimi finite.

1. Mulţimi ordonate

Adesea se consideră mulţimi finite ale căror elemente sunt aranjate într-o ordine determinată. Exemple:

a) alfabetul unei limbi este o mulţime ale cărei elemente (literele) sunt date într-o anumită ordine;

b) cifrele semnificative ale sistemului zecimal de numeraţie sunt cifre şi sunt date în ordinea naturală: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Elementele unei mulţimi se pot da şi într-o altă ordine. Este posibil, de exemplu, ca literele alfabetului românesc să fie aranjate fie în ordinea naturală, de la *a* la *z*, fie în ordinea inversă, de la *z* la *a*, fie în ordinea în care sunt prezentate în abecedar, la clasa I.

Definiţia 1.1

Spunem că o mulţime finită împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulţime ordonată.

Astfel, dacă A este o mulţime finită având n elemente şi dacă fiecărui element al său i se asociază un număr de la 1 la n numit rangul elementului astfel încât la elemente diferite ale lui A să corespundă numere de ordine diferite, mulţimea A devine o mulţime ordonată. Prin urmare, orice mulţime finită poate deveni o mulţime ordonată, ordinea elementelor stabilindu-se prin numerotarea elementelor mulţimii respective. Mulţimea ordonată obţinută se va nota cu $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, unde ordinea elementelor este dată de indici.

O mulţime ordonată este caracterizată prin elementele din care este formată şi prin ordinea în care sunt considerate acestea.

Astfel, două mulţimi ordonate sunt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele din care sunt formate, fie prin ordinea lor.

De exemplu, mulţimile $A=\{1,2,3,...,n\}$ şi $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ sunt ordonate şi diferă prin elementele din care sunt formate, iar mulţimile $C=\{1,2,3\}$ şi $D=\{1,3,2\}$ sunt, de asemenea, ordonate şi au aceleaşi elemente, dar se deosebesc prin ordinea în care acestea sunt dispuse în fiecare mulţime.

2. Permutări

Fie *A* o mulţime finită cu *n* elemente. Această mulţime se poate ordona în mai multe moduri, obţinându-se mulţimi ordonate, diferite, care se deosebesc între ele numai prin ordinea elementelor. Fiecare din mulţimile ordonate care se formează cu cele *n* elemente ale mulţimii *A*, se numeşte permutare a acestei mulţimi sau o permutare de *n* elemente. Numărul permutărilor de *n* elemente se notează cu P_n şi se citeşte „permutări de *n*". Ne propunem să determinăm numărul P_n al permutărilor de *n* elemente.

Vom face întâi un raţionament inductiv şi rezultatul pe care-l vom deduce îl vom demonstra prin metoda inducţiei matematice.

Avem:

1. O mulţime cu un singur element $A_1 = \{a_1\}$ poate fi ordonată într-un singur mod, deci $P_1 = 1$.

2. O mulţime cu două elemente $A_2 = \{a_1, a_2\}$ poate fi ordonată în două moduri, obţinându-se două permutări: $\{a_1, a_2\}$ şi $\{a_2, a_1\}$. Deci $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

3. O mulţime cu trei elemente $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ poate fi ordonată în 6 moduri, permutările acestei mulţimi fiind următoarele: $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3, a_1\}$, $\{a_3, a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_2, a_1\}$. Deci, $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Pe baza acestui raţionament prin inducţie incompletă putem formula următoarea propoziţie: „Numărul permutărilor de *n* elemente este $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \overset{\text{not}}{=} n!$ (*n* factorial)".

Această propoziţie trebuie demonstrată prin metoda inducţiei matematice. Numai atunci putem afirma că rezultatul exprimat în propoziţie este valabil pentru orice număr natural *n*.

Teorema 2.1

Pentru orice număr natural $n \geq 1$, numărul permutărilor de *n* elemente este $P_n = n!$.

Demonstraţie

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea $P_n = n!$

1. $P(1)$ este adevărată, după cum am constat în cadrul raţionamentului inductiv anterior.

2. Presupunem $P(k)$ adevărată şi să demonstrăm, pe baza acestei presupuneri, să şi $P(k+1)$ este adevărată. Fie o mulţime ordonată cu $k+1$ elemente. Ne propunem că ordonăm în toate modurile posibile această mulţime. Ultimul loc, al $k+1$-lea, poate fi ocupat de oricare din cele $k+1$ elemente ale mulţimii. Se obţin astfel $k+1$ moduri diferite de a ocupa ultimul loc. Să considerăm unul dintre aceste moduri de ordonare. Unul dintre elementele mulţimii va avea rangul $k+1$. Elementele rămase, în număr de *k*, trebuie să ocupe primele *k* locuri. Conform ipotezei de inducţie, aceasta se poate face în $P_k = k!$ moduri diferite. Pentru fiecare din cele $k+1$ moduri diferite de ocupare a poziţiei $k+1$ se procedează similar, rezultând astfel $(k+1) \cdot P_k$ moduri de a ordona o mulţime finită care are $k+1$ elemente distincte. Deci, $P_{k+1} = (k+1) \cdot P_k = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$. Prin urmare, am arătat că $P(k+1)$ este adevărată. Rezultă atunci că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Prin convenţie, mulţimea vidă poate să fie ordonată într-un singur mod, deci $P_0 = 0! = 1$.

3. Aranjamente

Fie o mulţime finită *A* cu *n* elemente şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Ne propunem să determinăm numărul submulţimilor ordonate, cu câte *k* elemente fiecare, extrase din elementele mulţimii *A*.

Definiţia 3.1

Dacă *A* este o mulţime finită cu *n* elemente, atunci submulţimile ordonate ale lui *A*, având fiecare câte *k* elemente, unde $0 \leq k \leq n$, se numesc „aranjamente de *n* elemente luate câte *k*”.

Numărul aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k* se notează A_n^k şi se citeşte „aranjamente de *n* luate câte *k*”.

Să observăm că două aranjamente de *n* elemente luate câte *k* diferă între ele atât prin *natura* elementelor, cât şi prin *ordinea* lor. De exemplu, dacă $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, atunci din elementele sale se pot constitui:

1) 3 submulţimi având fiecare câte un element: $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$; acestea se deosebesc între ele numai prin natura elementelor, iar numărul lor este $A_3^1 = 3$;

2) 6 submulţimi ordonate având fiecare câte 2 elemente: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_1\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_3, a_1\}$, $\{a_3, a_2\}$; acestea se deosebesc între ele fie prin natura elementelor, fie prin ordinea elementelor, iar numărul lor este $A_3^2 = 6 = 3 \cdot 2$;

3) 6 submulţimi ordonate având fiecare câte 3 elemente: $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3, a_1\}$, $\{a_3, a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_2, a_1\}$.

Acestea se deosebesc între ele numai prin ordinea lor, iar numărul lor este $A_3^3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Mai observăm că în acest caz, în care numărul *k* al elementelor fiecărei submulţimi coincide cu numărul *n* al elementelor mulţimii *A*, aranjamentele de *n* elemente luate câte *n* coincid cu permutările de *n* elemente ale lui *A*.

Ne propunem că găsim o formulă pentru calculul numărului A_n^k. Raţionamentul inductiv făcut pe exemplul anterior ne sugerează să considerăm că numărul A_n^k poate fi calculat cu formula următoare:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Vom demonstra formula pentru orice *k*, $n \in \mathbb{N}$, cu $0 \leq k \leq n$.

Teorema 3.2

Dacă *n* şi *k* sunt numere naturale astfel încât $0 < k < n$, atunci:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Demonstraţie

Arătăm mai întâi că $A_n^{k+1} = (n-k) \cdot A_n^k$. Într-adevăr, să repartizăm oricare $k+1$ elemente extrase din *n* elemente date, pe $k+1$ locuri. Pentru aceasta, se pot lua mai întâi oricare *k* elemente şi aranja pe primele *k* locuri din cele $k+1$, aceasta făcându-se în A_n^k moduri. Mai observăm că în fiecare din aceste cazuri rămân neutilizate $n-k$ elemente din cele *n* ale lui *A*. Oricare dintre aceste $n-k$ elemente se poate pune pe al $(k+1)$-lea loc. Astfel, în fiecare din cele

A_n^k moduri de aranjare a *k* elemente pe primele *k* locuri, obţinem $(n-k)$ posibilităţi prin care unul din cele $n-k$ elemente rămase ocupă al $(k+1)$-lea loc. Rezultă că $A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k)$.

Având în vedere că $A_n^1 = n$ şi formula demonstrată anterior, obţinem, succesiv:

$k := 2$: $\quad A_n^2 = A_n^1(n-1) = n(n-1)$;

$k := 3$: $\quad A_n^3 = A_n^2(n-2) = n(n-1)(n-2)$;

....

$k := k$: $\quad A_n^k = A_n^{k-1}(n-k+1) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$,

teorema fiind complet demonstrată. În continuare vom da o altă exprimare formulei găsite şi vom arăta că este adevărată şi pentru cazurile $k=0$ şi $k=n$.

Amplificăm expresia găsită pentru A_n^k cu $(n-k)!$. Obţinem

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) =$$
$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)...\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Deci, $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Pentru $k=0$ se obţine $A_n^0 = \dfrac{n!}{n!} = 1$, ceea ce este adevărat, deoarece orice mulţime conţine mulţimea vidă, pe care am convenit s-o considerăm ordonată într-un singur mod.

Pentru $k=n$ se obţine: $A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n! = P_n$. Prin urmare, ambele formule stabilite pentru calculul numărului aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k*, respectiv:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1);$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

sunt adevărate pentru orice *k*, astfel încât $0 \le k \le n$.

Aplicaţia 3.3

Fie *A* şi *B* două mulţimi finite, având *k*, respectiv *n* elemente cu $k \le n$. Să se determine numărul funcţiilor injective $f : A \to B$.

Rezolvare

Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ şi $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ cu $k \le n$.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie injectivă, atunci $(\forall)\, a_i \ne a_j$ din *A* vom avea $f(a_i) \ne f(a_j)$ în *B*. Rezultă că oricărei funcţii injective $f : A \to B$ îi corespunde o submulţime ordonată formată din *k* elemente distincte extrase din *B*. Invers, fiecare submulţime ordonată având *k* elemente distincte din *B*, de exemplu: $B_i = \{b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_k}\}$ defineşte o funcţie injectivă

$f: A \to B$, care realizează corespondenţa: $f\left(a_j\right) = b_{i_j}$, $1 \le j \le k$. Am arătat astfel că numărul funcţiilor injective definite pe o mulţime *A* cu *k* elemente, cu valori într-o mulţime *B* cu *n* elemente, $(k \le n)$ este egal cu numărul submulţimilor ordonate, având câte *k* elemente ale lui *B,* deci egal cu A_n^k.

În cazul particular $k = n$, deci când A şi B au acelaşi număr de elemente, atunci orice funcţie injectivă $f: A \to B$ este neapărat bijectivă.

Vom arăta că în acest caz funcţia *f* este şi surjectivă. Presupunem prin absurd că *f* nu ar fi surjectivă. Cum *f* este injectivă, deci $(\forall)\, a_i \ne a_j$ din *A* implică $f\left(a_i\right) \ne f\left(a_j\right)$ în *B*, rezultă în primul rând că $\operatorname{Im} f = f(A) = \{ f(x) | x \in A\}$ are exact *n* elemente distincte din *B*. Din presupunerea făcută că *f* nu este surjectivă rezultă că $(\exists)\, b \in B$, astfel încât $(\forall)\, x \in A$, $f(x) \ne b$, deci $b \notin f(A)$, de unde ar rezulta că $f(A)$ are mai puţin de *n* elemente, deci contradicţie cu concluzia obţinută anterior, dedusă pe baza injectivităţii lui *f*. Contradicţia arată că presupunerea făcută este falsă, deci *f* este neapărat surjectivă. Fiind şi injectivă, rezultă că *f* este bijectivă. Prin urmare, în cazul particular $k = n$ al aplicaţiei rezolvate aici rezultă că numărul funcţiilor bijective definite pe o mulţime *A* cu *n* elemente cu valori într-o mulţime *B* tot cu *n* elemente este egal cu $A_n^n = P_n = n!$.

În acest caz mulţimea *B* se poate înlocui cu *A*, obţinând $f: A \to A$ şi din acest motiv funcţia bijectivă $f: A \to A$ se mai numeşte şi permutare a mulţimii *A*. Reformulând, vom spune că numărul aplicaţiilor bijective definite pe o mulţime finită formată din *n* elemente, cu valori în ea însăşi, este egal cu numărul permutărilor mulţimii respective. Această formulare reprezintă totodată şi interpretarea egalităţii $A_n^n = P_n = n!$ în termenii aplicaţiilor bijective definite pe o mulţime finită cu *n* elemente, cu valori în ea însăşi.

4. Combinări

Fie mulţimea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ şi să considerăm toate *submulţimile* sale, care sunt următoarele:

1) mulţimea vidă: $\varnothing$;
2) 3 submulţimi formate din câte un singur element: $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$;
3) 3 submulţimi formate din câte două elemente fiecare: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_3, a_2\}$;
4) mulţimea totală: $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Faţă de cazul anterior, discutat în paragraful „Aranjamente”, când am considerat toate submulţimile ordonate ale lui *A* formate din 0 sau 1, sau 2, sau 3 elemente, în cazul de faţă am considerat, de asemenea, toate *submulţimile* lui *A* formate din 0 sau 1, sau 2, sau 3 elemente, dar fără să luăm în considerare şi ordinea elementelor în fiecare submulţime. În cazul general, fiind dată o mulţime finită cu *n* elemente, ne propunem să calculăm numărul submulţimilor sale având fiecare câte *k* elemente, unde $0 \le k \le n$.

Definiţia 4.1

Fie *A* o mulţime finită cu *n* elemente şi $k \in \mathbb{N}$, cu $0 \le k \le n$. Submulţimile lui *A* având fiecare câte *k* elemente se numesc „combinări de *n* elemente luate câte *k*”.

Numărul combinărilor de *n* elemente luate câte *k* se notează cu C_n^k şi se citeşte „combinări de *n* luate câte *k*".

Ne propunem să găsim o formulă pentru calculul numărului C_n^k.

Din exemplul analizat anterior rezultă: $C_3^0 = 1$; $C_3^1 = 3$; $C_3^2 = 3$; $C_3^3 = 1$ şi $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$, acesta fiind numărul tuturor submulţimilor mulţimii cu 3 elemente, $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Pentru cazul general să mai observăm că $C_n^0 = 1$, deoarece orice mulţime *A* cu *n* elemente are numai o submulţime fără nici un element, şi anume: mulţimea vidă. Pentru $k = 1$, avem $C_n^k = C_n^1 = n$, deoarece o mulţime cu *n* elemente $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ are *n* submulţimi formate dintr-un singur element şi anume submulţimile $\{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}$. Formula generală care permite exprimarea numărului C_n^k în funcţiile de *n* şi *k* este dată de teorema următoare.

Teorema 4.2

Fie *k* şi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $0 \le k \le n$. Atunci

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}.$$

Demonstraţie

Fie *A* o mulţime cu *n* elemente şi $k \in \mathbb{N}$, cu $0 \le k \le n$. Considerăm toate submulţimile mulţimii *A* care au câte *k* elemente. Ordonând fiecare dintre aceste submulţimi în toate modurile posibile, obţinem toate submulţimile ordonate ale lui *A* care au câte *k* elemente. Numărul acestora este A_n^k. Atunci putem scrie relaţia: $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, deoarece numărul tuturor submulţimilor de câte *k* elemente ale lui *A* este egal cu C_n^k, iar fiecare submulţime de câte *k* elemente poate fi ordonată în P_k moduri. Rezultă atunci:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

Utilizând cele două exprimări pentru A_n^k se obţin formulele:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Vom pune în evidenţă în continuare o legătură între numărul de combinări şi numărul funcţiilor strict crescătoare definite între mulţimi finite, ordonate.

Dacă $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ este o mulţime finită, ordonată, vom scrie $a_i < a_j$, dacă elementul a_i precede pe a_j, adică dacă $i < j$. Altfel spus, relaţia de ordine este relativă la indicii elementelor mulţimii *A*.

Dacă *A* este o mulţime ordonată, atunci ordinea pe *A* induce o ordine pe orice submulţime a sa. Concret, dacă $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ şi $B\subset A$, $B=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m}\}$, atunci a_{i_ℓ} precede pe a_{i_k} în *B* (şi scriem $a_{i_\ell}<a_{i_k}$), dacă a_{i_ℓ} precede pe a_{i_k} în *A*, adică $i_\ell<i_k$ şi vom spune că aceasta este ordinea indusă pe *B* de ordinea de pe *A*.

Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ şi $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ două mulţimi ordonate. O funcţie $f:A\to B$ se numeşte strict crescătoare dacă $(\forall)\,a_i,\ a_j\in A$, cu $a_i<a_j$, rezultă $f(a_i)<f(a_j)$ în *B*.

Dacă *A* şi *B* au acelaşi număr de elemente $(m=n)$, atunci există o unică funcţie strict crescătoare de la *A* la *B*, $u:A\to B$, care realizează corespondenţele: $u(a_i)=b_i$, $(\forall)\,i$, $1\le i\le n$. În particular, dacă $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, atunci unica funcţie strict crescătoare definită pe *A* şi cu valori tot în *A* este funcţia identică a mulţimii *A*:

$1_A:A\to A,\ 1_A(a_i)=a_i,\ (\forall)\,i,\ 1\le i\le n.$

În continuare, ne propunem să determinăm numărul funcţiilor strict crescătoare definite pe o mulţime ordonată *A* cu *m* elemente, cu valori într-o mulţime *B* cu *n* elemente. Constatăm că pentru a exista o astfel de funcţie este necesar ca $m\le n$.

Presupunem deci că $m\le n$ şi facem următoarele notaţii:

$\mathcal{F}_c(A,B)=$mulţimea funcţiilor strict crescătoare definite pe *A* cu valori în *B*;

$\mathcal{P}_m(B)=$ mulţimea tuturor submulţimilor lui *B*, care au câte *m* elemente fiecare.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 4.3

Fie *A* şi *B* mulţimi ordonate având *m*, respectiv *n* elemente, cu $m\le n$. Există o bijecţie între mulţimea $\mathcal{F}_c(A,B)$ a funcţiilor strict crescătoare definite pe *A* cu valori în *B* şi mulţimea $\mathcal{P}_m(B)$ a submulţimilor lui *B*, care au câte *m* elemente fiecare.

Demonstraţie

Definim funcţia $\varphi:\mathcal{F}_c(A,B)\to\mathcal{P}_m(B)$, prin $\varphi(f)=f(A)$. Cum *f* este injectivă, rezultă că $f(A)$ este o submulţime a lui *B*, cu *m* elemente. Evident, dacă $f\neq f'$, atunci $\varphi(f)\neq\varphi(f')$, adică φ este injectivă. Dacă $B'\subset B$ este o submulţime a lui *B* cu *m* elemente, considerăm că B' este ordonată cu ordinea indusă de cea de pe *B*. Însă, deoarece *A* şi B' au acelaşi număr de elemente, *m*, rezultă că există o unică funcţie strict crescătoare $f:A\to B'$. Considerăm atunci funcţia $\tilde{f}:A\to B$, astfel încât $\tilde{f}(a_i)=f(a_i)$. Avem că *f* este strict crescătoare, deci $f\in\mathcal{F}_c(A,B)$ şi mai mult, $\varphi(\tilde{f})=B'$. Am arătat, astfel, că φ este şi surjectivă, deci în final rezultă că φ este bijectivă.

Consecinţă

Numărul funcţiilor strict crescătoare definite pe o mulţime ordonată *A* cu *m* elemente, cu valori într-o mulţime *B* cu *n* elemente, $m \le n$, este egal cu numărul submulţimilor cu câte *m* elemente ale lui *B*, deci este egal cu C_n^m.

În continuare vom stabili câteva proprietăţi ale numerelor C_n^k, $0 \le k \le n$. Aceste proprietăţi exprimă diferite relaţii între submulţimile unei mulţimi şi se pot demonstra fie direct, utilizând formula de calcul pentru C_n^k, fie bazându-ne pe raţionamente cu mulţimi.

4.1 Formula combinărilor complementare

Dacă $0 \le k \le n$, atunci are loc egalitatea: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Demonstraţie

Într-adevăr, avem:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}.$$

Egalitatea exprimă faptul că numărul submulţimilor cu *k* elemente ale lui *A* este egal cu numărul submulţimilor cu $n-k$ elemente ale aceleiaşi mulţimi *A*. Să prezentăm şi demonstraţia bazată pe raţionamente cu mulţimi. Fie *A* o mulţime cu *n* elemente şi *X* o submulţime a lui *A* cu *k* elemente, aleasă arbitrar. Acestei mulţimi îi asociem în mod unic o submulţime bine determinată, cu $(n-k)$ elemente a lui *A*, şi anume: C_X (complementara lui *X*). Cum *X* a fost aleasă arbitrar, rezultă că fiecărei submulţimi cu *k* elemente a lui *A* îi corespunde o singură submulţime cu $n-k$ elemente a lui *A*. Prin urmare, numărul submulţimilor cu *k* elemente ale lui *A* este egal cu numărul submulţimilor sale cu $(n-k)$ elemente, adică are loc relaţia $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4.2 Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente

Pentru orice număr natural $n \ge 0$ are loc egalitatea:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Demonstraţie

Suma din membrul stâng al acestei egalităţi reprezintă numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu *n* elemente. Anterior am constatat că pentru o mulţime cu $n = 3$ elemente, numărul tuturor submulţimilor sale este $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$.

Pentru cazul general al unei mulţimi finite cu *n* elemente, afirmaţia rezultă din teorema următoare.

Teorema 4.2.1

Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi formate din *n* elemente este egal cu 2^n.

Demonstraţie

Vom aplica metoda inducţiei matematice. Fie $P(n)$ afirmaţia teoremei.

1) $P(0)$ este adevărată, deoarece pentru $n = 0$ obţinem mulţimea vidă, care are o singură submulţime, şi anume ea însăşi;

2) presupunem $P(k)$ adevărată şi să demonstrăm că şi $P(k+1)$ este adevărată. Fie $B_k=\{b_1,b_2,...,b_k\}$ şi admitem că B_k are 2^k submulţimi. Să arătăm că mulţimea $B_{k+1}=\{b_1,b_2,...,b_k,b_{k+1}\}$ are 2^{k+1} submulţimi. Fie cele 2^k submulţimi ale lui B_k. Din fiecare submulţime a lui B_k se obţine o nouă submulţime a lui B_{k+1}, deci se obţin încă 2^k submulţimi ale lui B_{k+1}. În total sunt deci $2^k+2^k=2^{k+1}$ submulţimi ale mulţimii B_{k+1}. Deci, $P(k+1)$ este adevărată. Rezultă atunci că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Exemplu:

1) $n=0$; $2^0=1\Rightarrow \mathcal{P}(B_0)=\varnothing$;

2) $n=1$; $2^1=2$; $B_1=\{b_1\}\Rightarrow\{\varnothing\}$; $\{b_1\}$;

3) $n=2$; $2^2=4$; $B_2=\{b_1,b_2\}\Rightarrow\{\varnothing\}$; $\{b_1\}$; $\{b_2\}$; $\{b_1,b_2\}$;

4) $n=3$; $2^3=8$; $B_3=\{b_1,b_2,b_3\}\Rightarrow\{\varnothing\}$; $\{b_1\}$; $\{b_2\}$; $\{b_1,b_2\}$; $\{b_3\}$; $\{b_1,b_3\}$; $\{b_2,b_3\}$; $\{b_1,b_2,b_3\}$.

4.3 Formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări

Pentru orice *k* şi *n*, astfel încât $0\le k<n$, are loc egalitatea:

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k.$$

Demonstraţie

Utilizând formula pentru calculul combinărilor C_n^k, obţinem:

$$C_{n-1}^k=\frac{A_{n-1}^k}{P_k}=\frac{(n-1)(n-2)...(n-1-k+1)}{k!};$$

$$C_{n-1}^{k-1}=\frac{A_{n-1}^{k-1}}{P_{k-1}}=\frac{(n-1)(n-2)...[n-1-(k-1)+1]}{(k-1)!}.$$

Mai departe rezultă:

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=\frac{(n-1)(n-2)...(n-k)}{k!}+\frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{(k-1)!}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)+k\cdot(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k+k)}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}=\frac{A_n^k}{P_k}=C_n^k,$$

adică are loc relaţia din enunţ.

4.4 Triunghiul lui Pascal

Cu ajutorul formulei de recurenţă pentru calculul numărului de combinări putem calcula C_n^k, dacă se cunosc C_{n-1}^k şi C_{n-1}^{k-1}. Valorile numerelor C_n^k se vor scrie sub forma unui tabel triunghiular numit „triunghiul lui Pascal”. În linia $n+1-a$ a tabelului sunt aşezate în ordine numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$. Cum $C_n^0 = C_n^n = 1$, acestea două se completează de la sine pe orice rând, iar numerele rămase se calculează cu ajutorul formulei de recurenţă, astfel: pentru calculul lui C_n^k se vor aduna numerele din linia precedentă care se află în stânga şi dreapta lui C_n^k.

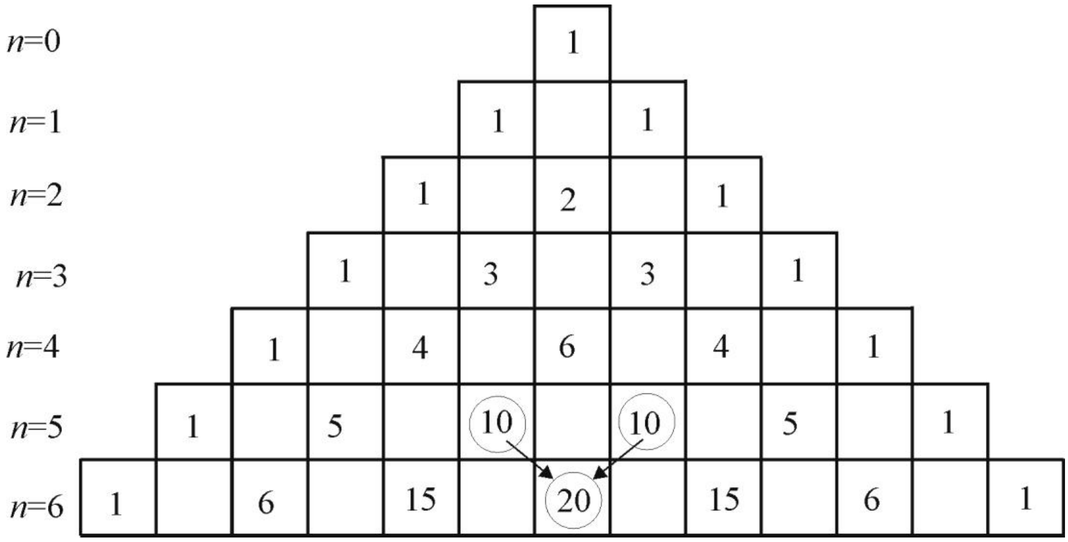


Fig. 1

Exemplu: $C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = 10 + 10 = 20$.

5. Binomul lui Newton şi aplicaţii

5.1 Binomul lui Newton

Fie *a* şi $b \in \mathbb{R}$. Se cunosc sau se stabilesc uşor formulele:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Constatăm că toţi coeficienţii monoamelor din membrul drept ai acestor formule sunt tocmai numerele din linia triunghiului lui Pascal corespunzătoare exponentului *n* din membrul stâng. Pentru cazul general, unde *n* este un număr natural oarecare, are loc:

Formula binomului lui Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^m a^{n-m} b^m + ... + C_n^n b^n.$$

Demonstraţie

Vom aplica metoda inducţiei matematice.

Notăm cu $P(n)$ formula binomului lui Newton.

1. Verificare. Pentru $n=1$, $P(1)$ este adevărată, deoarece

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a+b.$$

2. Presupunem $P(k)$ adevărată pentru $n=k$ şi demonstrăm că şi $P(k+1)$ este adevărată. Fie, deci, adevărată relaţia:

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + ... + C_k^m a^{k-m} b^m + ... + C_k^k b^k.$$

Să arătăm că şi $P(k+1)$ este adevărată:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = \left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + ... + C_k^m a^{k-m} b^m + ... + C_k^k b^k\right)(a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + ... + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + ... + C_k^k ab^k + C_k^0 a^k b + ... + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + ... +$$

$$+ ... + C_k^{k-1} ab^k + C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right) a^k b + ... + \left(C_k^m + C_k^{m+1}\right) a^{k-m} b^{m+1} + ... +$$

$$+ ... + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) ab^k + C_k^k b^{k+1}$$

Cum, însă:

$$C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0;\ C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1, ..., C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}, ..., C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k,$$

$C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}$, rezultă:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + ... + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + ... + C_{k+1}^k ab^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1},$$

deci $P(k+1)$ este adevărată. Rezultă, deci, conform metodei inducţiei matematice, că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Proprietăţi legate de binomul lui Newton

1. În dezvoltarea $(a+b)^n$ sunt $n+1$ termeni, iar coeficienţii dezvoltării sunt $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, în număr de $n+1$. Aceştia se numesc coeficienţi binomiali şi se regăsesc pe linia *n* a triunghiului lui Pascal.

2. Deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$ (formula combinărilor complementare), rezultă că termenii din dezvoltare egal depărtaţi de termenii extremi au coeficienţi binomiali egali.

3. În formula binomului lui Newton exponenţii puterilor lui *a* descresc de la *n* la 0, în timp ce cei ai lui *b* cresc de la 0 la *n*. În orice termen suma exponenţilor puterilor lui *a* şi *b* este egală cu exponentul puterii binomului, deci cu *n*.

4. Coeficienţii binomiali mai întâi cresc şi apoi descresc. Dacă exponentul *n* este par, $n = 2m$, atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc, respectiv C_{2m}^m este cel mai mare,

iar dacă *n* este impar, $n=2m+1$, atunci coeficienţii binomiali ai celor doi termeni din mijlocul dezvoltării sunt egali între ei şi sunt cei mai mari: $C_{2m+1}^{m}=C_{2m+1}^{m+1}$.

5. Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, cu numărul de ordine $k+1$ din dezvoltarea binomului lui Newton, se numeşte termenul de rang $k+1$, se notează cu T_{k+1} şi se mai numeşte termenul general al dezvoltării:

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k\ ,\ k=0,1,2,...,n.$$

Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi ai dezvoltării se poate stabili uşor, scriind relaţia dintre C_n^k şi C_n^{k+1}. Avem:

$$C_n^{k+1}=\frac{A_n^{k+1}}{P_{k+1}}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k\cdot (k+1)}=\frac{n-k}{k+1}\cdot C_n^k.$$

Mai departe rezultă

$$T_{k+2}=C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot \underbrace{C_n^k a^{n-k} b^k}\cdot \frac{b}{a}.$$

Deci, $T_{k+2}=\dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{b}{a}\cdot T_{k+1}$.

5.2 Identităţi în calculul cu combinări

În paragrafele anterioare am stabilit deja câteva identităţi verificate de binomiali C_n^k, $0\le k\le n$:

$$C_n^k=C_n^{n-k} \quad \textbf{(1)}$$

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k \quad \textbf{(2)}$$

$$C_n^0+C_n^1+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n. \quad \textbf{(3)}$$

Ultima relaţie se poate obţine acum şi din formula binomului lui Newton, pentru $a=b=1$. Dacă vom lua şi $a=1$ şi $b=-1$, tot din formula binomului lui Newton se obţine:

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^k C_n^k+...+(-1)^n C_n^n=0. \quad \textbf{(4)}$$

Adunând şi respectiv scăzând relaţiile (**3**) şi (**4**), se obţine:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+...=C_n^1+C_n^3+C_n^5+...=2^{n-1}, \quad \textbf{(5)}$$

adică suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang par este egală cu suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang impar.

LECŢIA 2 – EXTENSII ŞI GENERALIZĂRI

În continuare vom prezenta alte concepte importante din combinatorică. Acestea vor completa şi extinde în mod natural pe cele studiate anterior şi vor contribui la o mai bună înţelegere şi aprofundare a lor.

6.1 Aranjamente cu repetiţie

Definiţia 6.1.1

Fie $A \neq \varnothing$. Se numeşte cuvânt cu elemente din *A* un sistem finit ordonat de elemente din *A*, scris astfel: $a_1a_2...a_k$. Numărul *k* se numeşte lungimea cuvântului $a_1a_2...a_k$. Cuvântul care nu conţine nici un element din *A* se numeşte cuvântul vid şi are lungimea zero.

Vom spune că două cuvinte din *A*, respectiv $a_1a_2...a_s$ şi $b_1b_2...b_k$ sunt egale dacă au aceeaşi lungime, deci $s = k$ şi $a_i = b_i$, $(\forall)\, i$, $1 \le i \le k$.

Pentru cuvântul $a_1a_2...a_k$ se mai utilizează şi notaţia $(a_1, a_2, ..., a_k)$. Cuvintele de lungime 2 se mai numesc *perechi* ordonate, cele de lungime 3 – *triplete* şi în general cele de lungime *k* se numesc *k-upluri* ordonate.

Elementele $a_1, a_2, ..., a_k$ care compun cuvântul $a_1a_2...a_k$ se numesc componente ale cuvântului.

Deosebirile dintre noţiunea de cuvânt şi cea de mulţime sunt următoarele.

i) la o mulţime nu contează ordinea în care sunt scrise elementele sale, în timp ce la un cuvânt ordinea elementelor este esenţială; două cuvinte formate din aceleaşi elemente (cel puţin două dintre ele fiind diferite), dar aşezate în ordine diferită, sunt distincte; de exemplu, $abca \neq aabc$;

ii) toate elementele unei mulţimi sunt distincte, în timp ce într-un cuvânt componentele se pot repeta.

Fie $N_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ mulţimea primelor *k* numere naturale şi *A* o mulţime oarecare. Fie $f : N_k \to A$ funcţia care realizează corespondenţa: $f(i) = a_i$, $1 \le i \le k$, adică numărului *i* din N_k îi corespunde, prin funcţia *f*, elementul a_i din *A*.

Să notăm prin $\mathcal{F}\,(N_k, A)$ mulţimea funcţiilor definite pe N_k cu valori în *A* şi prin $\mathrm{Cuv}_k(A)$ mulţimea cuvintelor de lungime *k* cu elementele din *A*.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 6.1.2

Fie *A* o mulţime oarecare şi $N_k = \{1, 2, ..., k\}$. Există o bijecţie între mulţimea $\mathcal{F}\,(N_k, A)$ a funcţiilor definite pe N_k cu valori în *A* şi mulţimea $\mathrm{Cuv}_k(A)$ a cuvintelor de lungime *k* cu elemente din *A*.

Demonstraţie

Definim funcţia $\varphi : \mathcal{F}\,(N_k, A) \to \mathrm{Cuv}_k(A)$ prin $\varphi(f) = a_1a_2...a_k$, unde $f(i) = a_i$, $1 \le i \le k$. Arătăm că φ este o funcţie bijectivă.

a) φ este injectivă. Într-adevăr, fie f şi $g \in \mathcal{F}\left(N_k, A\right)$, cu $\varphi(f) = a_1 a_2 ... a_k$, $\varphi(g) = b_1 b_2 ... b_k$ şi $\varphi(f) = \varphi(g)$. Din definiţia egalităţii a două cuvinte rezultă că $a_i = b_i$, $(\forall)\, i$, $1 \le i \le k$, deci $f(i) = g(i)$ $(\forall)\, i \in N_k$, adică $f = g$. Prin urmare φ este injectivă.

b) φ este surjectivă. Într-adevăr, fie $a_1 a_2 ... a_k \in \mathrm{Cuv}_k\left(A\right)$ un cuvânt de lungime *k* format cu elemente din *A*, ales arbitrar. Există o funcţie $f : N_k \to A$, definită prin $f\left(i\right) = a_i$, $\left(\forall\right) i$, $1 \le i \le k$ care are, evident, proprietatea că $\varphi(f) = a_1 a_2 ... a_k$, deci φ este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă, funcţia φ este bijectivă, teorema fiind astfel demonstrată. Să mai menţionăm că în teorema 6.1.2 mulţimea N_k se poate înlocui cu orice mulţime finită cu *k* elemente.

Definiţia 6.1.3

Fie dată o mulţime *A* cu *n* elemente şi *k* un număr natural. Cuvintele de lungime *k* formate cu elemente din *A* se numesc *aranjamente cu repetiţie de n elemente luate câte k*.

Numărul lor se notează cu $\overline{A}_n^k$. Să calculăm acest număr. El este egal cu numărul elementelor mulţimii $\mathrm{Cuv}_k\left(A\right)$, unde *A* are *n* elemente. Având în vedere şi rezultatul demonstrat în teorema 6.1.2, rezultă că numărul $\overline{A}_n^k$ este egal cu numărul elementelor mulţimii $\mathcal{F}\left(N_k, A\right)$, deci cu numărul funcţiilor definite pe o mulţime formată din *k* elemente, cu valori într-o mulţime cu *n* elemente. Pentru aceasta însă avem următorul rezultat:

Teorema 6.1.4

Numărul funcţiilor definite pe o mulţime formată din „*k*” elemente cu valori într-o mulţime formată din „*n*” elemente este n^k.

Demonstraţie

Fie $B_k = \left\{b_1, b_2, ..., b_k\right\}$ şi $A_n = \left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$ două mulţimi având *k*, respectiv *n* elemente. Să arătăm că numărul funcţiilor $f : B_k \to A_n$ este egal cu n^k. Vom face demonstraţia prin metoda inducţiei matematice, după *k*.

Fie $P\left(k\right)$ afirmaţia: „Numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu *k* elemente, cu valori într-o mulţime cu *n* elemente, este n^k”.

1) $P\left(1\right)$ este adevărată, deoarece pe mulţimea $B_1 = \left\{b_1\right\}$ se pot defini $n = n^1$ funcţii cu valori în mulţimea $A_n = \left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$, fiecare astfel de funcţie ducând unicul element al mulţimii B_1, într-unul din cele *n* elemente ale mulţimii A_n:

$f_1\left(b_1\right) = a_1;$

$f_2\left(b_1\right) = a_2;$

……………

$f_n\left(b_1\right) = a_n.$

2) Să arătăm că $P\left(k\right) \Rightarrow P\left(k+1\right)$. Fie mulţimile $B_k = \left\{b_1, b_2, ..., b_k\right\}$ şi $B_{k+1} = \left\{b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1}\right\}$. Cum $P\left(k\right)$ este adevărată rezultă că numărul funcţiilor

$f: B_k \to A_n$ este egal cu n^k. Dacă $f: B_k \to A_n$ este o funcţie oarecare dintre cele n^k funcţii, atunci definim încă *n* funcţii: $f_i: B_{k+1} \to A_n$, $1 \le i \le n$, prin $f_i(b_j) = f(b_j)$ pentru $1 \le j \le k$ şi $f_i(b_{k+1}) = a_i$, unde $1 \le i \le n$. Aşadar, pentru fiecare funcţie $f: B_k \to A_n$ se obţin încă *n* funcţii $f_i: B_{k+1} \to A_n$. Mai mult, toate funcţiile $f: B_{k+1} \to A_n$ sunt de acest tip. Rezultă că numărul funcţiilor $f: B_{k+1} \to A_n$ este $n^k \cdot n = n^{k+1}$, prin urmare $P(k+1)$ este adevărată. Rezultă atunci că $P(k)$ este adevărată pentru orice $k \in \mathbb{N}$, teorema fiind demonstrată. Aşadar, conform teoremelor 6.1.2 şi 6.1.4 rezultă că numărul „aranjamentelor cu repetiţie de *n* elemente luate câte *k*” este dat de relaţia:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

şi coincide cu numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu *k* elemente, cu valori într-o mulţime cu *n* elemente.

Formarea cuvintelor cu elemente dintr-o mulţime poate fi descrisă intuitiv astfel: presupunem că toate elementele mulţimii *A* au fost introduse într-o urnă şi apoi din această urnă extragem elemente, unul după altul, notând de fiecare dată elementul extras şi apoi îl introducem din nou în urnă, înainte de efectuarea următoarei extrageri. După efectuarea numărului de *k* extrageri, obţinem un cuvânt de lungime *k* (cu elementele aşezate în ordinea ieşirii lor din urnă), compus din elemente ale mulţimii *A* şi care, evident, se pot repeta.

Dacă vom presupune că după fiecare extragere nu mai punem din nou în urnă elementul extras, următoarea extragere făcându-se, deci, din elementele rămase până la extragerea imediat anterioară, atunci în cuvântul obţinut nu se vor mai repeta elemente din *A*. Un astfel de cuvânt va fi compus din *k* elemente diferite din *A* aşezate în componenţa cuvântului în ordinea extragerii. Astfel de cuvinte în care componentele nu se repetă se numesc mulţimi ordonate.

Fiind dată o mulţime *A* cu *n* elemente şi $0 \le k \le n$, se pot forma diverse submulţimi ordonate cu câte *k* elemente fiecare, extrase din mulţimea *A*. Submulţimile ordonate ale lui *A* având fiecare câte *k* elemente, unde $0 \le k \le n$, am văzut că se numesc aranjamente (fără repetiţie) de *n* elemente luate câte *k*, numărul lor este notat cu A_n^k şi este dat de relaţia

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Prin aplicaţia 3.3 am stabilit că numărul aranjamentelor (fără repetiţie) de *n* elemente luate câte *k* este egal cu numărul funcţiilor injective definite pe o mulţime formată din *n* elemente cu valori într-o mulţime de *k* elemente.

În continuare vom particulariza rezultatul formulat şi demonstrat în teorema 6.1.2, şi anume: vom analiza ce devine această teoremă în cazul aranjamentelor fără repetiţie de *n* elemente luate câte *k*.

Notăm cu $\mathrm{Inj}(N_k, A)$ mulţimea funcţiilor injective definite pe $N_k = \{1, 2, ..., k\}$ cu valori în mulţimea *A* care *n* elemente $(k \le n)$. Evident, $\mathrm{Inj}(N_k, A) \subset \mathcal{F}(N_k, A)$, deoarece $\mathcal{F}(N_k, A)$ este mulţimea tuturor funcţiilor definite pe N_k cu valori în *A*.

Să notăm cu $\mathcal{A}_k(A)$ mulţimea aranjamentelor (fără repetiţie) de cele *n* elemente ale mulţimii *A*, luate câte *k*.

Fie $\varphi : \mathcal{F}(N_k, A) \to \mathrm{Cuv}_k(A)$, din teorema 6.1.2. Rezultă că orice element din $\varphi(\mathrm{Inj}(N_k, A)) \subset \mathrm{Cuv}_k(A)$ este un cuvânt de lungime *k*, format cu elemente din *A* şi ale cărui componente nu se repetă. Prin urmare, φ induce o funcţie

$$\overline{\varphi} : \mathrm{Inj}(N_k, A) \to \mathcal{A}_k(A),$$

$\overline{\varphi}(f) = a_1 a_2 \ldots a_k$, unde $f(i) = a_i$, $1 \le i \le k$. Cum $\overline{\varphi}(f) = \varphi(f)$ şi ţinând seama de rezultatul formulat şi demonstrat în teorema 6.1.2, rezultă că are loc şi următoarea teoremă:

Teorema 6.1.5

Funcţia $\overline{\varphi} : \mathrm{Inj}(N_k, A) \to \mathcal{A}_k(A)$ este bijectivă.

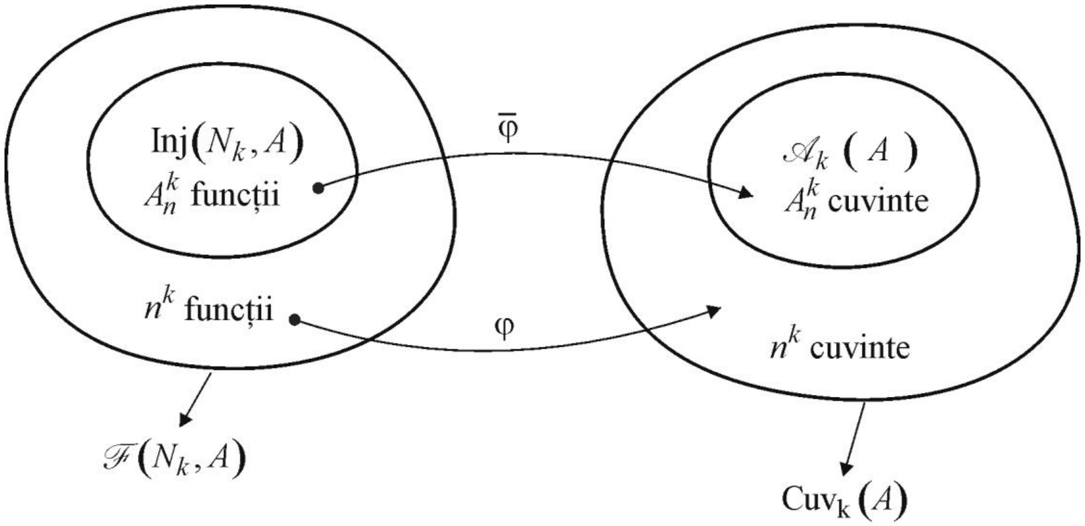


Fig. 2

6.2 Permutări cu repetiţie

În paragraful 2 s-au studiat permutările fără repetiţie, iar în aplicaţia 3.3 s-a dat o interpretare a permutărilor în termeni de funcţii bijective şi s-a făcut şi legătura cu aranjamentele (fără repetiţie) de *n* elemente luate câte *n*.

În continuare ne vom ocupa de permutările cu repetiţie.

Fie *A* o mulţime cu *n* elemente, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Vom defini mai întâi conceptul de tip al unui cuvânt format cu elemente din *A*. Fie α un astfel de cuvânt. Notăm cu $m_i(\alpha)$ numărul care arată de câte ori intră elementul a_i în compunerea cuvântului α. Dacă a_i nu apare în scrierea lui α, atunci vom lua $m_i(\alpha) = 0$.

Definiţia 6.2.1

Sistemul de numere $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ se numeşte tipul cuvântului α şi vom spune că α este de tip $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Exemplu: dacă $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ şi $\alpha = a_1 a_3 a_5 a_2 a_3 a_1 a_1$, atunci α este un cuvânt de tip $(3,1,2,0,1)$.

Două cuvinte de acelaşi tip pot să difere unul de altul numai prin ordinea componentelor, deoarece fiind de aceleaşi tip, elementele din *A* care apar în aceleaşi cuvinte sunt aceleaşi şi apar de acelaşi număr de ori.

Definiţia 6.2.2

Pentru un tip de cuvânt dat, orice cuvânt cu elementele mulţimii *A* care are acelaşi tip se numeşte permutare cu repetiţie de acest tip.

Exemplu: fie $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ şi tipul $(2,3,0,1)$. Atunci cuvintele $a_1a_2a_4a_2a_2a_1$ şi $a_2a_1a_1a_4a_2a_2$ sunt permutări cu repetiţie de tipul dat.

Notăm cu $P(m_1,m_2,...,m_n)$ numărul permutărilor cu repetiţie de tip $(m_1,m_2,...,m_n)$ şi ne propunem să calculăm acest număr. Pentru aceasta vom demonstra rezultatul următor.

Teorema 6.2.3

Numărul permutărilor cu repetiţie de tip $(m_1,m_2,...,m_n)$ este:

$$P(m_1,m_2,...,m_n)=\frac{(m_1+m_2+...+m_n)!}{m_1!m_2!...m_n!}.$$

Demonstraţie

Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ şi tipul $(m_1,m_2,...,m_n)$. Ne propunem să calculăm numărul permutărilor cu repetiţie (deci al cuvintelor) de tip $(m_1,m_2,...,m_n)$ de lungime $\ell=m_1+m_2+...+m_n$.

Să presupunem că $m_{i_1},m_{i_2},...,m_{i_k}$ sunt nenule, iar celelalte componente ale tipului considerat sunt nule. Fie următoarea permutare cu repetiţie (cuvânt) de tipul considerat:

$$\alpha=\underbrace{a_{i_1}a_{i_1}...a_{i_1}}_{m_{i_1}\text{ ori}}\underbrace{a_{i_2}a_{i_2}...a_{i_2}}_{m_{i_2}\text{ ori}}...\underbrace{a_{i_k}a_{i_k}...a_{i_k}}_{m_{i_k}\text{ ori}}.$$

Pentru a obţine toate permutările cu repetiţie de acest tip vom proceda în modul descris în cele ce urmează.

Mai întâi renumerotăm componentele cuvântului α, obţinând scrierea notată cu β pentru acelaşi cuvânt α:

$$\beta=a_{i_1}^1a_{i_1}^2...a_{i_1}^{m_{i_1}}a_{i_2}^1a_{i_2}^2...a_{i_2}^{m_{i_2}}...a_{i_k}^1a_{i_k}^2...a_{i_k}^{m_{i_k}}.$$

După renumerotare toate elementele care formează cuvântul α au devenit diferite între ele. Numărul tuturor permutărilor care se pot face cu elementele „diferite între ele” din cuvântul β este egal cu $\ell!$, unde $\ell=m_{i_1}+m_{i_2}+...+m_{i_k}$ şi reprezintă lungimea cuvântului α. Dacă într-o permutare oarecare dintre cele $\ell!$ permutări se şterg indicii atribuiţi elementelor componente în etapa de renumerotare, se obţine o permutare cu repetiţie de acelaşi tip cu α. Este clar însă că în acest mod se poate obţine o aceeaşi permutare cu repetiţie de mai multe ori. Astfel, permutarea iniţială α se poate obţine din toate permutările componentelor cuvântului β care se obţin efectuând o permutare oarecare a celor m_{i_1} componente: $a_{i_1}^1,a_{i_1}^2,...,a_{i_1}^{m_{i_1}}$, apoi efectuând o permutare a celor m_{i_2} componente: $a_{i_2}^1,a_{i_2}^2,...,a_{i_2}^{m_{i_2}}$ şi tot aşa până la ultimul indice, deci efectuând o permutare oarecare a celor m_{i_k} componente: $a_{i_k}^1, a_{i_k}^2, \dots, a_{i_k}^{m_{i_k}}$ şi numai în acest mod. Dar numărul permutărilor componentelor $a_{i_1}^1, a_{i_1}^2, \dots, a_{i_1}^{m_{i_1}}$ este egal cu $m_{i_1}!$, al componentelor $a_{i_2}^1, a_{i_2}^2, \dots, a_{i_2}^{m_{i_2}}$ este $m_{i_2}!$ şi tot aşa până la ultimul indice i_k, al componentelor $a_{i_k}^1, a_{i_k}^2, \dots, a_{i_k}^{m_{i_k}}$ este $m_{i_k}!$. Mai observăm că aceste permutări se pot combina între ele independent una de alta. Prin urmare, cuvântul α se poate obţine din exact $m_{i_1}! \cdot m_{i_2}! \cdot \ldots \cdot m_{i_k}!$ permutări ale componentelor cuvântului β. În această manieră se poate obţine orice permutare cu repetiţie de tip $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ şi de lungime ℓ.

Prin urmare, numărul permutărilor cu repetiţie de tip $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ este mai mic de $m_{i_1}! \cdot m_{i_2}! \cdot \ldots \cdot m_{i_k}! = m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!$ (dacă $m_j = 0$, atunci $m_j! = 1$) ori decât numărul permutărilor componentelor cuvântului β, care este egal cu $\ell! = \left(m_{i_1} + m_{i_2} + \ldots + m_{i_k}\right)! = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)!$. Am demonstrat că are loc relaţia:

$$P(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!}.$$

Exemplu:

Pentru desfăşurarea unui joc, un număr de 15 jucători trebuie să formeze 3 echipe astfel încât prima echipă să aibă 5 jucători, a doua 4 şi a treia 6 jucători. În câte moduri se pot forma aceste echipe?

Rezolvarea problemei constă în determinarea numărului cuvintelor de lungime 15, fiecare de tipul $(5,4,6)$. Acest număr este tocmai numărul permutărilor cu repetiţie de tip $(5,4,6)$, adică:

$$P(5,4,6) = \frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 6!} = 630630.$$

În cazul particular al permutărilor cu repetiţie de tipul $(n-k, k)$, avem:

$$P(n-k, k) = \frac{(n-k+k)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k,$$

deci numărul permutărilor cu repetiţie din $n-k$ litere egale cu *a* şi *k* litere egale cu *b* este egal cu C_n^k.

6.3 Combinări cu repetiţie

În paragraful 6.2 (permutări cu repetiţie) am determinat numărul cuvintelor de un tip dat (teorema 6.2.3).

În continuare ne propunem să determinăm numărul tipurilor diferite pe care le pot avea cuvintele de lungime *k*, cu elemente dintr-o mulţime *A* care are *n* elemente.

Fiecare astfel de tip este un sistem de *n* numere naturale $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, astfel încât $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, cu precizarea că unele dintre numerele k_i, $1 \le i \le n$, pot fi şi zero. Este evident că numărul *k* poate fi mai mic, egal sau mai mare, decât numărul *n* şi că oricare ar fi sistemul de numere naturale $(k_1, k_2, ..., k_n)$, cu proprietatea $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$, există cel puţin un cuvânt de lungime *k* şi de tip $(k_1, k_2, ..., k_n)$, cu elemente dintr-o mulţime care *n* elemente.

Concretizând, dacă mulţimea $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, atunci într-un astfel de cuvânt elementul a_i apare de k_i ori şi numărul k_i, $1 \le i \le n$ se numeşte multiplicitatea lui a_i.

Definiţia 6.3.1

Sistemele de numere naturale $(k_1, k_2, ..., k_n)$ cu proprietatea $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$ se numesc combinări cu repetiţie de *n* elemente luate câte *k*, iar numărul lor se notează cu $\overline{C}_n^k$.

Vom demonstra următorul rezultat:

Teorema 6.3.2

Numărul combinărilor cu repetiţie de *n* elemente luate câte *k* este dat de formula:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Demonstraţie

Fie $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Conform definiţiei, o combinare cu repetiţie de *n* elemente luate câte *k*, este un sistem de numere naturale $(k_1, k_2, ..., k_n)$, astfel încât $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$. Acest sistem poate fi scris ca un cuvânt format numai din 0 şi 1, înlocuind fiecare număr $k_i > 0$ prin $\underbrace{111...1}_{k_i \text{ ori}}$ şi punând 0 după fiecare grupă de unităţi, cu excepţia ultimei grupe. Dacă avem $k_i = 0$, atunci pe acel loc se lasă 0. Astfel, numărul unităţilor care intră în componenţa cuvântului astfel obţinut este $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$, iar numărul zerourilor este egal cu $n-1$. Rezultă că numărul cuvintelor diferite de această formă este egal cu numărul permutărilor cu repetiţie de *k* unităţi şi $n-1$ zerouri, adică este egal cu $P(k, n-1)$. Însă,

$$P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k = \overline{C}_n^k.$$

Exemplu

La o cofetărie există 6 specialităţi de prăjituri. În câte moduri se pot forma cartoane diferite, cu câte 10 prăjituri fiecare?

Rezolvare

Ordinea prăjiturilor pe un carton nu are importanţă, deci fiecare carton cu prăjituri este dat de un cuvânt de lungime 10, format din 6 elemente (cele 6 specialităţi de prăjituri). Deci, ordinea componentelor cuvântului nu contează. Prin urmare, rezolvarea problemei constă în determinarea numărului tipurilor diferite ale unor astfel de cuvinte, de lungime $k = k_1 + k_2 + ... + k_6 = 10$, formate cu cele 6 specialităţi de prăjituri. Acest număr este egal cu numărul combinărilor cu repetiţie de 6 elemente luate câte 10, deci

$$\overline{C}_6^{10}=C_{6+10-1}^{10}=C_{15}^{10}=C_{15}^{5}=\frac{A_{15}^5}{P_5}=\frac{360360}{120}=3003.$$

Aplicaţii

I Numărul termenilor în scrierea canonică a unui polinom.

I. 1 Un polinom omogen de gradul k în n nedeterminate are cel mult $\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^{k}=C_{n+k-1}^{n-1}$ termeni.

Demonstraţie

Fie $P(X_1,X_2,...,X_n)$ un polinom omogen de gradul *k*, cu coeficienţi într-un corp *K*. Condensat, el se va scrie astfel

$$P(X_1,X_2,...,X_n)=\sum_{k_1+k_2+...+k_n=n} a_{k_1k_2...k_n}\cdot X_1^{k_1}\cdot X_2^{k_2}...X_n^{k_n}$$

şi numărul termenilor săi este maxim dacă toţi coeficienţii săi $a_{k_1k_2...k_n}$ sunt nenuli. Prin urmare, numărul maxim de termeni al polinomului este egal cu numărul combinărilor cu repetiţie de *n* elemente $X_1,X_2,...,X_n$, luate câte *k*, deci egal cu $\overline{C}_n^k$. Dacă *m* este numărul termenilor polinomului considerat, avem că

$$m=\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^{k}=C_{n+k-1}^{n-1}.$$

I. 2 Un polinom de gradul *k* în *n* nedeterminate are cel mult $C_{k+n}^{k}=C_{k+n}^{n}$ termeni.

Demonstraţie

Fie polinomul de gradul *k* în *n* nedeterminate:

$$P(X_1,X_2,...,X_n)=\sum_{0\le k_1+k_2+...+k_n\le k} a_{k_1k_2...k_n}\cdot X_1^{k_1}\cdot X_2^{k_2}...X_n^{k_n}$$

şi polinomul omogen de gradul *k* în $n+1$ nedeterminate:

$$Q(X_1,X_2,...,X_n,X)=\sum_{0\le k_1+k_2+...+k_n\le k} a_{k_1k_2...k_n}\cdot X_1^{k_1}\cdot X_2^{k_2}...X_n^{k_n}\cdot X^{k-\sum_{i=1}^{n}k_i}.$$

Cele două polinoame *P* şi *Q* au acelaşi număr de termeni. Conform rezultatului demonstrat la punctul **I. 1** deducem că numărul de termeni ai polinomului *P* este mai mic sau egal cu numărul combinărilor cu repetiţie de $n+1$ elemente luate câte *k*, adică

$$\overline{C}_{n+1}^k=C_{n+1+k-1}^{k}=C_{n+k}^{k}=C_{n+k}^{n}.$$

II Formula unui produs de binoame. Binomul lui Newton. Puterea* m *a unei sume din* n *termeni.

II. 1 Fie produsul a *n* factori de forma:

$$\prod_{i=1}^{n}(a+b_i)=(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n).$$

În dezvoltarea acestui produs coeficientul lui a^{n-k} este egal cu suma tuturor produselor posibile de *k* factori luaţi dintre $b_1, b_2, ..., b_n$.

Demonstraţie

Vom demonstra rezultatul prin metoda inducţiei matematice după *n*, numărul de factori ai produsului.

Pentru $n = 2$ avem:

$$\left(a+b_1\right)\left(a+b_2\right)=a^2+\left(b_1+b_2\right)\cdot a+b_1b_2$$

– coeficientul lui $a^1 = a^{2-1}$ (deci $k = 1$), este: $b_1 + b_2$ (suma produselor de $k = 1$ factori).

– coeficientul lui $a^0 = a^{2-2}$ (deci $k = 2$) este: b_1b_2 (suma produselor de $k = 2$ factori).

Presupunem afirmaţia adevărată pentru produsul a $n-1$ factori şi o demonstrăm şi pentru produsul a n factori.

Fie, deci,

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(a+b_i\right)=a^{n-1}+P_1a^{n-2}+P_2a^{n-3}+...+P_{k-1}a^{n-k}+...+P_{n-1},$$

unde P_{k-1} este suma tuturor produselor posibile de $k-1$ factori dintre $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$. Înmulţim în ambii membrii cu $a + b_n$ şi obţinem:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a+b_i\right)=\left(a^{n-1}+P_1a^{n-2}+P_2a^{n-3}+...+P_{k-1}a^{n-k}+...+P_{n-1}\right)\left(a+b_n\right)=$$

$$=a^n+\left(P_1+b_n\right)a^{n-1}+\left(P_2+P_1b_n\right)\cdot a^{n-2}+...+\left(P_k+P_{k-1}\cdot b_n\right)a^{n-k}+...+P_{n-1}b_n.$$

În expresia $\left(P_k + P_{k-1}\cdot b_n\right)$ (coeficientul lui a^{n-k}) avem:

– P_k este suma tuturor produselor posibile de câte *k* factori care nu conţin pe b_n, luaţi dintre $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$;

– P_{k-1} este suma tuturor produselor posibile de câte $k-1$ factori care nu conţin pe b_n, luaţi dintre $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$;

– rezultă că $P_{k-1}\cdot b_n$ reprezintă suma tuturor produselor posibile de câte *k* factori, dintre b_n şi termenii lui P_{k-1};

– $\left(P_k + P_{k-1}\cdot b_n\right)$ reprezintă suma tuturor produselor posibile de câte *k* factori luaţi dintre $b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n$.

Am arătat, astfel că afirmaţia este adevărată şi pentru produsul a *n* factori. Rezultă, conform principiului inducţiei matematice, că afirmaţia este adevărată pentru orice număr natural *n*.

II. 2 Binomul lui Newton este un caz particular al celui precedent. Astfel, luând $b_1 = b_2 = ... = b_n = b$, atunci coeficientul lui a^{n-k} este egal cu $C_n^k \cdot b^k$.

Într-adevăr, numărul termenilor asemenea care conţin pe $a^{n-k}\cdot b^k$ este dat de numărul permutărilor cu repetiţie de $n-k$ litere egale cu *a* şi *k* litere egale cu *b*, deci cu numărul permutărilor cu repetiţie de tip $\left(n-k, k\right)$ şi care este egal cu C_n^k. Deci, $\left(a+b\right)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + b^n$.

II. 3 Puterea a *m*-a a sumei $x_1 + x_2 + ... + x_n$ are dezvoltarea următoare:

$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^m = \sum_{m_1+m_2+...+m_n=m} P\left(m_1, m_2, ..., m_n\right) x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n} ,$$

unde $P\left(m_1, m_2, ..., m_n\right) = \dfrac{\left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)!}{m_1! m_2! ... m_n}$.

Demonstraţie

Pentru efectuarea dezvoltării $\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^m$ trebuie să înmulţim *m* factori egali între ei:

$$m \text{ linii} \begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n; \\ x_1 + x_2 + ... + x_n; \\ .... \\ x_1 + x_2 + ... + x_n. \end{cases}$$

Astfel, se înmulţeşte fiecare termen din linia 1 cu fiecare termen din linia a doua, apoi fiecare termen al sumei obţinute din produsul primelor două linii cu fiecare termen din linia a treia şi se continuă tot aşa până se termină cele *m* linii. În final se adună toate produsele obţinute. Numărul termenilor produsului obţinut în final este egal cu numărul $\overline{A}_n^m$ al aranjamentelor cu repetiţie de *n* elemente luate câte *m*, deci cu n^m. În etapa următoare se grupează termenii asemenea. Este clar că numărul termenilor asemenea cu $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$, unde $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$ este egal tocmai cu numărul permutărilor cu repetiţie de tip $\left(m_1, m_2, ..., m_n\right)$. Astfel, coeficientul termenului $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$ unde $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$ este egal, în suma finală, cu $P\left(m_1, m_2, ..., m_n\right)$.

Exemplu

Conform formulei stabilite anterior, avem:

$$\begin{aligned}
&\left(x + y + z\right)^3 = P\left(3,0,0\right) \cdot x^3 + P\left(0,3,0\right) \cdot y^3 + P\left(0,0,3\right) z^3 + \\
&P\left(2,1,0\right) x^2 y + P\left(2,0,1\right) x^2 z + P\left(0,2,1\right) y^2 z + P\left(1,2,0\right) x y^2 + \\
&+P\left(1,0,2\right) x z^2 + P\left(0,1,2\right) y z^2 + P\left(1,1,1\right) xyz = \frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} x^3 + \\
&+\frac{3!}{0! \cdot 3! \cdot 0!} y^3 + \frac{3!}{0! \cdot 0! \cdot 3!} z^3 + \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} x^2 y + \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} x^2 z + \\
&+\frac{3!}{0! \cdot 2! \cdot 1!} y^2 z + \frac{3!}{1! \cdot 2! \cdot 0!} x y^2 + \frac{3!}{1! \cdot 0! \cdot 2!} x z^2 + \frac{3!}{0! \cdot 1! \cdot 2!} y z^2 + \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} xyz = \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3\left(x^2 y + x^2 z + y^2 z + x y^2 + x z^2 + y z^2\right) + 6xyz
\end{aligned}$$

TESTE DE AUTOEVALUARE

Testul nr. 1

1. Să se demonstreze relaţiile:

a) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$;

b) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$;

c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + \ldots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

2. Să se calculeze sumele:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$;

b) $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$;

c) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^m C_n^m$.

3. Probleme diverse

1) Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor nevide ale mulţimii $\{3,4,5,6,7,8\}$, aceasta sa aibă toate elementele impare;

2) Într-o grupă sunt 25 studenţi, dintre care 12 sunt băieţi. Să se determine în câte moduri se poate alege o echipă reprezentativă a grupei, formată din 3 băieţi şi 2 fete, care să reprezinte grupa la o întrecere studenţească, ştiind că toţi studenţii grupei sunt apţi să participe la întrecere, cu şanse egale de calificare în etapa următoare.

3) Care este numărul funcţiilor bijective $f:\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea $f(1)=3$? Dar al funcţiilor injective ? Dar al tuturor funcţiilor care se pot defini în aceleaşi condiţii ?

4) Care este numărul funcţiilor strict crescătoare $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$? Dar al funcţiilor strict crescătoare $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ cu proprietatea suplimentară $f(1)=1$?

Testul nr. 2

1. Să se demonstreze relaţiile:

1) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ... + ... = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right]$;

2) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + ... + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

3) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... + ... = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$.

2. Să se calculeze sumele:

1) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (-1)^n (n+1)C_n^n$;

2) $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + ... + (4n-1)C_n^n$;

3) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$;

4) $\left(C_n^0\right)^2 - \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + (-1)^n \left(C_n^n\right)^2$.

3. Permutări cu repetiţie, aranjamente cu repetiţie, combinări cu repetiţie

1) Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1) = 4$;
2) Să se calculeze numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ care au proprietatea $f(1) = f(4) = 2$;
3) Fie mulţimea $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o submulţime de forma $\{a,b\}$, unde $a,b \in A$ să aibă loc egalitatea $a+b=8$.
4) Fie mulţimea $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche de forma (a,b) din produsul cartezian $A \times A$, să aibă loc egalitatea $a+b=8$. Comparaţi şi comentaţi rezultatul obţinut cu cel de la problema 4.

TEME DE CONTROL

TEMĂ DE CONTROL Nr. 1

Multimi finite, ordonate. Aplicaţii injective, bijective, permutări, aranjamente, combinări.

1. Să se demonstreze relaţiile:

1) $C_{2n}^{n}=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2$;

2) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots+\ldots=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]$;

3) $C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

4) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

2. Să se calculeze sumele:

1) $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n$;

2) $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n$;

3) $C_n^k+C_{n+1}^k+C_{n+2}^k+\ldots+C_{n+m}^k$;

3. Probleme de numărare:

1) Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,3,5,7,9\}$?

2) Câte numere naturale pare de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,5,6,7,9\}$?

3) Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de 3 cifre, acesta sa aibă două cifre egale;

4) Într-o grupă sunt 25 studenţi, dintre care 12 sunt băieţi. Să se determine în căte moduri se poate alege o echipă reprezentativă a grupei, formată din 3 băieţi şi 2 fete, care să reprezinte grupa la o întrecere studenţească, ştiind că toţi studenţii grupei sunt apţi să participe la întrecere, cu şanse egale de calificare în etapa următoare.

TEMĂ DE CONTROL Nr. 2

Permutări cu repetiţie, aranjamente cu repetiţie, combinări cu repetiţie

1. Utilizând relaţia:

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^m=\sum_{m_1+m_2+...+m_n=m} P\left(m_1,m_2,...,m_n\right)x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n}$$, unde

$$P\left(m_1,m_2,...,m_n\right)=\frac{\left(m_1+m_2+...+m_n\right)!}{m_1!m_2!...m_n}$$, să se calculeze expresiile:

a) $\left(a+b+c+d\right)^3$;

b) $\left(x+y+z\right)^4$.

2. Să se genereze toate sistemele de numere naturale $\left(k_1,k_2,...,k_n\right)$, cu proprietatea $k_1+k_2+...+k_n=k$, ştiind că $n=3$ şi $k=4$;

3. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1)=4$;

4. Câte numere naturale pare de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,5,6,7,9\}$?

5. Să se calculeze numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ care au proprietatea $f(1)=f(4)=2$;

6. Fie mulţimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se determine numărul submulţimilor mulţimii A care au 5 elemente, dintre care exact două sunt numere pare.

7. Să se determine numărul funcţiilor strict descrescătoare $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$, cu proprietatea $f(4)=2$;

8. Câte funcţii $f:\{1,2,3,...,10\}\to\{0,1\}$ cu proprietatea $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)+f(10)=3$ se pot construi ?

9. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din multimea numerelor naturale formate din trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

10. Fie mulţimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o submulţime de forma $\{a,b\}$, unde $a,b\in A$ să aibă loc egalitatea $a+b=8$.

11. Fie mulţimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche de forma (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, să aibă loc egalitatea $a+b=8$. Comparaţi şi comentaţi rezultatul obţinut cu cel de la problema 9.

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂŢARE NR. 1:

1. Tomescu, I. – ***Introducere în combinatorică***, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972;
2. Ion, D. I., Niţă, C., Năstăsescu, C. – ***Complemente de algebră***, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984;
3. Năstăsescu, C., Niţă, C., Brandiburu, M., Joiţa, D. – ***Exerciţii şi probleme de algebră***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

UNITATEA DE ÎNVĂŢARE NR. 2 - ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR. STUDIUL GRAFURILOR CU AJUTORUL MATRICELOR BOOLEENE ASOCIATE

Obiective urmărite:

- Însuşirea unor noţiuni fundamentale din domeniul teoriei grafurilor.
- Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură informatică, tehnică sau economică, cu utilizarea cunoştinţelor însuşite.
- Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
- Formarea şi dezvoltarea aptitudinilor şi deprinderilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată, în rezolvarea problemelor tehnico-economice şi de specialitate;

Rezumat:

În această unitate de învăţare sunt prezentate, pe parcursul a trei lecţii, următoarele:

- definiţii, terminologie, notaţii, concepte fundamentale în teoria grafurilor;
- algoritmi şi metode de studiu în teoria grafurilor cu ajutorul matricelor booleene asociate.

După parcurgerea acestei unităţi de învăţare studenţii trebuie să-şi însuşească următoarele:

- noţiunea de graf în reprezentare analitică, sagitală sau matriceală;
- noţiuni legate de orientare: drum, subdrum, circuit, graf parţial, subgraf, graf tare conex, componentă tare conexă, succesori şi predecesori, arbori;
- noţiuni legate de neorientare: muchie, lanţ, ciclu, graf conex, componentă conexă;
- matrice booleană, matrice de adiacenţă, matricea drumurilor sau matricea conexă terminală asociate unui graf;
- drum hamiltonian în grafuri fără circuite şi în grafuri cu circuite;
- algoritmi de determinare a drumului hamiltonian, graf condensat;
- operaţii cu grafuri şi cu matrice booleene asociate grafurilor: reuniunea, intersecţia, produsul de compoziţie, graful reciproc;
- algoritmi pentru determinarea numărului şi lungimii circuitelor şi a arborilor într-un graf.

Cuvinte cheie:

Noţiunile de: graf, drum, subdrum, circuit, graf parţial, subgraf, graf tare conex, componentă tare conexă, succesori şi predecesori, arbori, muchie, lanţ, ciclu, graf conex, componentă conexă, matrice booleană, matrice de adiacenţă şi matricea drumurilor asociate unui graf, drum hamiltonian, drum eulerian

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar însuşirii noţiunilor teoretice şi algoritmilor prezentaţi în unitatea de învăţare nr.2, precum şi formării deprinderilor de calcul şi utilizării algoritmilor pentru rezolvarea claselor de probleme specifice acestei părţi a cursului este estimat la aproximativ 2-3 ore pentru fiecare lecţie. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare şi a Temei de control.

LECŢIA 3 - ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

Teoria grafurilor este o ramură relativ tânără a matematicii, prima lucrare în acest domeniu fiind scrisă de Euler, în urmă cu două secole.

Interesul pentru teoria grafurilor a crescut mult în ultimele decenii, odată cu aplicarea acesteia în rezolvarea a numeroase probleme din economie, sociologie, psihologie, inginerie etc. Teoria grafurilor se consideră astăzi că face parte din domeniul matematicii combinatoriale, având interferenţe cu algebra, topologia şi teoria probabilităţilor.

1.1 Definiţii, terminologie, notaţii, concepte fundamentale

Fie o mulţime nevidă, $X \neq \varnothing$ şi o aplicaţie $\Gamma: X \to \mathcal{P}(X)$. Această aplicaţie defineşte pe *X* o relaţie binară, *R* şi anume xRy, $x, y \in X$, dacă $y \in \Gamma(x)$. Fie $R \subset X \times X$, $R = \{(x,y) / xRy, x, y \in X\}$. Avem, deci: $(\forall)$ $x \in X$ atunci $(x,y) \in R$ dacă $y \in \Gamma(x)$. Având dată o relaţie binară pe *X*, de exemplu printr-o submulţime $R \subset X \times X$, putem defini pe *X* o aplicaţie Γ astfel: pentru $(\forall)$ $x \in X$, $y \in \Gamma(x)$ dacă $(x,y) \in R$.

Dacă $A \subset X$ şi $\Gamma: X \to \mathcal{P}(X)$, vom numi imaginea lui *A* prin Γ mulţimea $\Gamma(A) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in A} \Gamma(x)$.

Definiţia 1.1.1

Se numeşte **graf** ansamblul format dintr-o mulţime *X* şi o aplicaţie $\Gamma: X \to \mathcal{P}(X)$ şi se notează $G = (X, \Gamma)$. Având în vedere consideraţiile de mai sus rezultă că o definiţie echivalentă este următoarea: se numeşte graf un cuplu $G = (X, \Gamma)$ unde *X* este o mulţime nevidă iar Γ este o relaţie binară pe *X*.

Deoarece în aplicaţiile uzuale se întâlnesc de obicei grafuri definite pe mulţimi finite, în continuare ne vom ocupa numai de grafuri $G = (X, \Gamma)$ în care $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ este finită. Numărul elementelor lui *X* determină ordinul grafului finit *G*. Când $\operatorname{card}(X) = n$, graful $G = (X, \Gamma)$ se numeşte graf finit de ordinul *n*. Elementele mulţimii *X* se numesc **vârfuri** ale grafului *G*.

Vom spune că $G = (X, \Gamma)$ este dat în **reprezentare analitică** dacă se dă $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi pentru $(\forall)$ $x_i \in X$ se precizează mulţimea $\Gamma(x_i) \in \mathcal{P}(X)$.

1.2 Definirea noţiunilor legate de orientare

Un graf $G = (X, \Gamma)$ poate fi dat şi în **reprezentare geometrică sau sagitală**. Aceasta se obţine în modul descris în continuare.

Se reprezintă fiecare element al mulţimii *X* printr-un punct ales arbitrar în plan, cu respectarea condiţiei ca la elemente diferite ale lui *X* să corespundă puncte diferite în plan. Mai departe, dacă $x \in X$ şi $y \in \Gamma(x)$, atunci punctul care-l reprezintă pe *x* se leagă de punctul care-l reprezintă pe *y* printr-un **arc orientat** (săgeată) de la *x* la *y*. Vârful *x* se numeşte originea sau extremitatea iniţială a arcului (x, y), iar vârful *y* se numeşte extremitatea sa finală sau terminală.

Dacă un vârf nu este extremitatea nici unui arc, el se numeşte vârf izolat. Dacă un vârf este extremitatea a mai mult de două arce, se numeşte **nod**. Un arc pentru care extremitatea iniţială coincide cu cea finală se numeşte **buclă**; sensul săgeţii în reprezentarea unei bucle nu are importanţă.

Graful $G=(X,\Gamma)$ este complet determinat de mulţimea vârfurilor *X* şi de mulţimea arcelor, pe care o vom nota cu *U*. Este evident că mulţimea *U* a tuturor arcelor grafului *G* determină complet aplicaţia Γ şi reciproc, aplicaţia Γ determină complet mulţimea *U* a arcelor grafului. Astfel, un graf *G* poate fi dat fie prin ansamblul (X,Γ), fie prin ansamblul (X,U).

Exemplul 1.2.1

Fie graful $G=(X,\Gamma)$, unde: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, ia funcţia Γ este dată prin mulţimea valorilor sale în toate vârfurilor grafului:

$\Gamma(x_1)=\{x_2,x_3\}$; $\Gamma(x_2)=\{x_3,x_4,x_5\}$; $\Gamma(x_3)=\{x_4\}$, $\Gamma(x_4)=\{x_1,x_4,x_6\}$; $\Gamma(x_5)=\{x_3,x_6\}$; $\Gamma(x_6)=\{x_2,x_3,x_4,x_6\}$.

Deoarece punctele din plan pentru reprezentarea elementelor lui *X* pot fi alese arbitrar în plan, acelaşi graf poate avea reprezentări diferite din punct de vedere grafic. O reprezentarea geometrică (sagitală) a acestui graf poate fi cea din figura 1.2.1

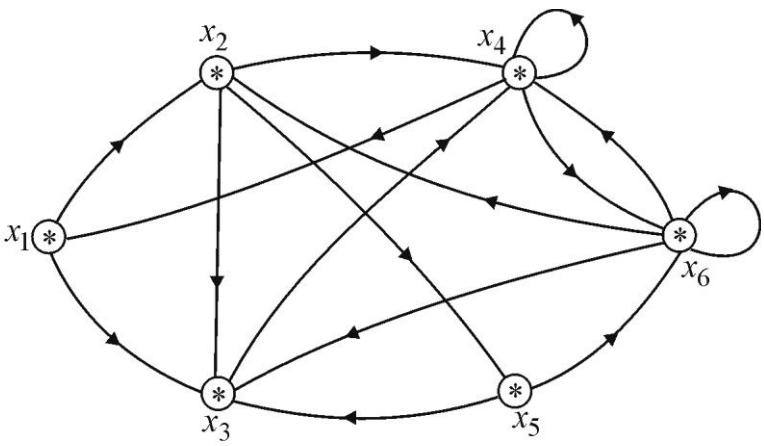


Fig. 1.2.1

De asemenea, dacă se dă aplicaţia Γ, se poate determina mulţimea *U* a arcelor grafului.

Reciproc, dacă se dă reprezentarea sagitală a unui graf se poate deduce reprezentarea analitică a sa, adică aplicaţia $\Gamma: X \to \mathcal{P}(X)$ şi evident, mulţimea *X*.

Exemplul 1.2.2

Fie graful *G* având reprezentarea sagitală în figura 1.2.2.

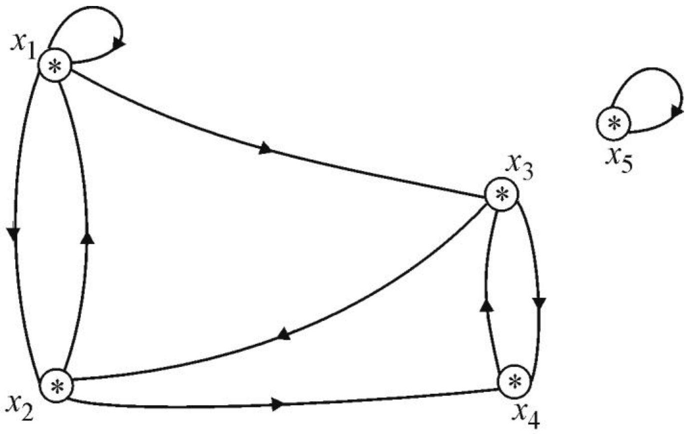


Fig. 1.2.2

Mulţimea vârfurilor: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$.

Mulţimea arcelor:

$$U=\{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_3),(x_2,x_4),(x_5,x_5)\}$$

Aplicaţia $\Gamma : X \rightarrow \mathrm{P}(X)$ este definită astfel: $\Gamma(x_1)=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\Gamma(x_2)=\{x_1,x_4\}$, $\Gamma(x_3)=\{x_2,x_4\}$, $\Gamma(x_4)=\{x_3\}$, $\Gamma(x_5)=\{x_5\}$.

Două vârfuri distincte x şi y se numesc adiacente dacă există un arc care le uneşte: $(x,y)\in U$. Două arce sunt adiacente dacă originea sau extremitatea unuia din ele coincide cu originea sau extremitatea celuilalt. Un arc (x_i,x_j) se spune că este incident cu vârful x_i spre exterior şi este incident cu vârful x_j spre interior.

Într-un graf $G=(X,U)$, se numeşte **drum** un şir de arce $(u_1,u_2,...,u_k)$ astfel încât extremitatea terminală a unui arc u_i coincide cu extremitatea iniţială a arcului următor, u_{i+1}. Un drum din graful *G* se numeşte **simplu** dacă parcurge o singură dată fiecare arc al său, în caz contrar numindu-se drum compus. Un drum se poate defini şi ca o succesiune de vârfuri, $\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k}\right)$, astfel încât $x_{i_{j+1}}\in\Gamma\left(x_{i_j}\right)$, $(\forall)\ j\in\{1,2,...,k-1\}$, ceea ce este echivalent cu $\left(x_{i_j},x_{i_{j+1}}\right)\in U$, $(\forall)\ j\in\{1,2,...,k-1\}$. Un drum de la *x* la *x* se numeşte **circuit**. Între două vârfuri oarecare ale grafului *G* pot exista mai multe drumuri sau nici unul.

Un drum care trece o singură dată prin fiecare vârf al său se numeşte **drum elementar**, iar în caz contrar se numeşte neelementar. Un drum elementar este simplu, dar un drum simplu poate fi neelementar (de exemplu, un drum simplu care conţine un circuit).

Un circuit se numeşte simplu dacă parcurge o singură dată fiecare arc al său şi este elementar dacă trece o singură dată prin fiecare vârf al său. O buclă se mai poate defini şi ca un caz particular al unui circuit format dintr-un arc.

Lungimea unui drum este dată de numărul de arce din care este compus drumul; nu trebuie să confundăm această noţiune cu lungimea drumului în sensul curent al acestei noţiuni (măsurabilă în *m*, de exemplu).

Un drum elementar care trece prin toate vârfurile grafului *G* se numeşte **drum hamiltonian**.

Un drum μ' se numeşte **subdrum** al unui drum μ dacă vârfurile consecutive ale lui μ' sunt vârfuri consecutive şi în μ. În figura 1.2.1 drumurile $\mu_1 = \{x_2, x_5, x_3, x_4\}$ şi $\mu_2 = \{x_1, x_2, x_5\}$ sunt subdrumuri ale drumului $\mu = \{x_1, x_2, x_5, x_3, x_4, x_6\}$.

Fie $G = (X, U)$ un graf, dat prin mulţimea vârfurilor *X* şi mulţimea arcelor, *U*.

Se numeşte **graf parţial** al grafului $G = (X, U)$, un graf $G' = (X, U')$, unde $U' \subset U$.

Un graf parţial al unui graf *G* se obţine prin suprimarea unor arce din graful *G*; vârfurile grafului *G* şi ale oricărui graf parţial al său rămân aceleaşi.

Se numeşte **subgraf** al grafului $G = (X, \Gamma)$ (dat prin aplicaţia $\Gamma : X \to \mathrm{P}(X)$) un graf $G' = (X', \Gamma')$, unde $X' \subset X$ iar Γ' este definită prin $\Gamma'(x) = \Gamma(x) \cap X'$, $(\forall)\ x \in X'$.

Prin urmare, un subgraf al unui graf *G* se obţine prin suprimarea unor vârfuri ale grafului *G* şi a tuturor arcelor care au una din extremităţi în vârfurile suprimate.

În figura 1.2.3 este reprezentat un graf parţial al grafului din figura 1.2.1, obţinut prin suprimarea arcelor (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_3) şi buclei (x_6, x_6).

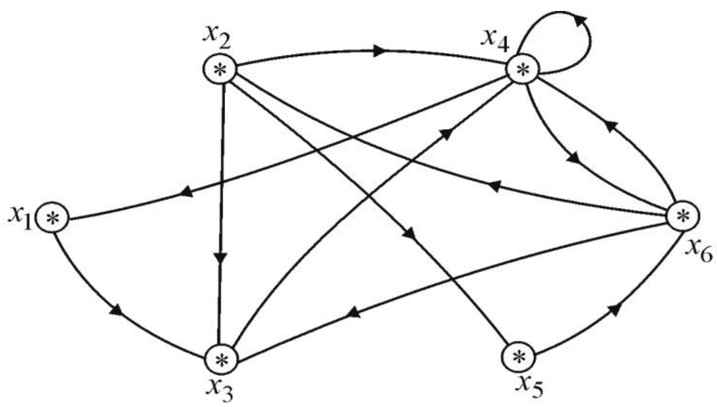


Fig. 1.2.3

În figura 1.2.4 este reprezentat un subgraf al grafului din figura 1.2.1, obţinut prin suprimarea vârfurilor x_1 şi x_4 şi a tuturor arcelor care aveau o extremitate în fiecare dintre aceste vârfuri.

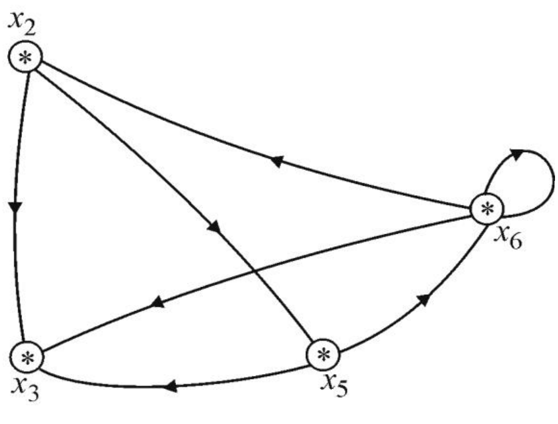


Fig. 1.2.4

Un graf $G=(X,\Gamma)$ se numeşte **complet** dacă $(\forall)\ x,y\in X$, $x\neq y$, există cel puţin unul din arcele (x,y), (y,x) sau, cu alte cuvinte, dacă $(x,y)\notin U$, rezultă $(y,x)\in U$, $(\forall)\ x,y\in X$, $x\neq y$.

Un graf este **simetric** dacă $(\forall)\ (x,y)\in U \Rightarrow (y,x)\in U$ şi **antisimetric** dacă $(\forall)\ (x,y)\in U \Rightarrow (y,x)\notin U$.

Un graf este **simplu** dacă $X=X_1\bigcup X_2$, $X_1,X_2\neq\varnothing$, $X_1\bigcap X_2=\varnothing$ şi $(\forall)\ (x,y)\in U \Rightarrow x\in X_1$ şi $y\in X_2$.

Un graf este **tare conex** dacă $(\forall)\ x,y\in X, x\neq y$, există în graf un drum de la *x* la *y* (sau că orice pereche de vârfuri $x,y\in X$, $x\neq y$, se află pe un circuit).

Fie $x\in X$. Mulţimea $C(x)\subset X$, formată din vârful *x* şi toate vârfurile $y\in X$ pentru care există un circuit ce trece prin vârfurile *y* şi *x* se numeşte **componentă tare conexă** a lui *G*, corespunzătoare vârfului $x\in X$. Astfel, dacă $y\in C(x)$, înseamnă că există un drum de la *x* la *y* şi unul de *y* la *x*.

Pentru componentele tari conexe ale unui graf are loc rezultatul exprimat în teorema următoare.

Teorema 1.2.1

Mulţimea componentelor tari conex ale unui graf $G=(X,\Gamma)$ formează o partiţie a lui *X*, adică:

1°. $C(x_i)\neq\varnothing$,

2°. $C(x_i)\neq C(x_j)\Rightarrow C(x_i)\bigcap C(x_j)=\varnothing$,

3°. $\bigcup\limits_{x_i\in X} C(x_i)=X$.

Demonstraţie

1°. Din definiţia mulţimii $C(x_i)$ avem că $x_i\in C(x_i)$, deci $C(x_i)\neq\varnothing$, $(\forall)\ x_i\in X$.

2°. Fie $C(x_i)\neq C(x_j)$ şi presupunem prin absurd că intersecţia lor este nevidă. Rezultă, deci, că $(\exists)\ x_k\in C(x_i)\bigcap C(x_j)$.

Din $x_k\in C(x_i)$ rezultă că există un circuit ce trece prin x_i şi x_k.

Din $x_k\in C(x_j)$ rezultă că există un circuit ce trece prin x_j şi x_k.

Prin urmare există un circuit ce trece prin x_i şi x_j şi x_k, de unde rezultă că $x_i\in C(x_j)$ şi $x_j\in C(x_i)$, deci $C(x_i)=C(x_j)$, contradicţie cu ipoteza că $C(x_i)\neq C(x_j)$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci rămâne că $C(x_i)\bigcap C(x_j)=\varnothing$.

3°. Este evident că $(\forall)\ x_i\in X$, avem $C(x_i)\subset X$, deci $\bigcup\limits_{x_i\in X} C(x_i)\subset X$.

Totodată, deoarece $X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$ şi $\{x_i\} \subset C(x_i)$ rezultă că are loc şi incluziunea inversă: $X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\} \subset \bigcup_{x_i \in X} C(x_i)$.

Din dubla incluziune rezultă egalitatea 3° din enunţul teoremei.

Teorema 1.2.2

Un graf este tare conex dacă şi numai dacă are o singură componentă tare conexă.

Demonstraţia se obţine imediat prin reducere la absurd utilizând definiţia componentei tare conexă a unui graf şi a rezultatului stabilit în teorema anterioară.

1.3 Definirea noţiunilor legate de neorientare

Fie $G=(X,\Gamma)$ un graf.

Se numeşte **muchie** a grafului *G* orice pereche neordonată de vârfuri $x, y \in X$, $x \neq y$, astfel că $(x,y) \in U$ sau $(y,x) \in U$ sau ambele, concomitent, adică dacă legătura dintre cele două vârfuri distincte *x* şi *y* poate fi făcută indiferent în ce sens (fie de la *x* la *y*, fie de la *y* la *x*, fie în ambele sensuri), printr-un arc de lungime egală cu 1. O muchie se reprezintă geometric printr-un segment neorientat care leagă vârfurile *x* şi *y* care o definesc şi se va utiliza notaţia $[x,y]$. Vom nota mulţimea tuturor muchiilor grafului *G* prin $\bar{U}$. Un graf în care legăturile dintre vârfuri sunt muchii se va numi **graf neorientat**, în timp ce graful pentru care toate legăturile dintre vârfuri sunt arce orientate, se va numi **graf orientat**. Unui graf orientat simetric i se poate asocia un graf neorientat, legătura dintre două vârfuri *x* şi *y* realizată de cele două arce (x,y) şi (y,x), de sensuri contrarii, înlocuindu-se cu muchia $[x,y]$.

De asemenea, unui graf neorientat i se pot asocia mai multe grafuri orientate, înlocuind fiecare muchie cu două arce orientate în sens opus.

Fie $G=(X,\bar{U})$ un graf neorientat şi $x \in X$. Se numeşte **gradul vârfului *x*** numărul muchiilor care au o extremitate în vârful *x* şi se notează cu $g(x)$. Dacă $g(y)=0$, atunci vârful *y* este izolat.

Propoziţia 1.3.1

Într-un graf neorientat cu *m* muchii, suma gradelor tuturor vârfurilor este $2m$.

Justificarea este imediată, ţinând cont că în suma gradelor vârfurilor fiecare muchie $[x,y]$ este numărată de două ori.

În graful neorientat $G=(X,\bar{U})$ un şir de muchii $[\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_k]$ se numeşte **lanţ** dacă fiecare muchie $\bar{u}_i$ este legată printr-o extremitate de muchia $\bar{u}_{i-1}$ şi prin cealaltă extremitate de muchia $\bar{u}_{i+1}$, $(\forall)\ i \in \{2,3,...,k-1\}$. Evident, un lanţ poate fi definit şi printr-o succesiune de vârfuri $[x_1, x_2, ..., x_k]$, dacă $[x_i, x_{i+1}] = \bar{u}_i$, $(\forall)\ i \in \{1,2,...,k-1\}$.

Un lanţ finit în care vârful iniţial coincide cu cel final se numeşte **ciclu**.

Un **lanţ** este **simplu** dacă nu trece de două sau mai multe ori prin aceeaşi muchie.

În caz contrar el este **lanţ compus**. Un **lanţ** este **elementar** dacă trece o singură dată prin fiecare dintre vârfurile sale, în caz contrar numindu-se **neelementar**. Un ciclu poate fi simplu sau compus elementar sau neelementar.

Un **graf** este **conex** dacă pentru oricare două vârfuri $x, y \in X$, $x \neq y$ există cel puţin un lanţ de la *x* la *y*.

Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf, $x \in X$ şi $C(x)$ mulţimea formată din *x* şi din toate celelalte vârfuri ale grafului legate prin lanţuri de *x*. Mulţimea $C(x)$ astfel constituită se numeşte **componenta conexă** a lui *G*, generată de vârful *x* (sau corespunzătoare vârfului *x*). Este evident că $C(x)$ determină un subgraf al lui *G* care este, desigur, conex. Ca şi în cazul grafurilor orientate se pot demonstra două rezultate similare celor din teoremele 1.2.1 şi 1.2.2. Astfel, în cazul grafurilor neorientate avem:

Teorema 1.3.2

Mulţimea componentelor conexe ale grafului $G = (X, \bar{U})$ constituie o partiţie a lui *X*, adică:

1°. $C(x_i) \neq \varnothing$;

2°. $C(x_i) \neq C(x_j) \Rightarrow C(x_i) \cap C(x_j) = \varnothing$;

3°. $\bigcup\limits_{x_i \in X} C(x_i) = X$.

Aşadar dacă există mai multe submulţimi distincte $C(x_i)$ ale lui *X*, atunci acestea formează o partiţie a lui *X*.

Teorema 1.3.3

Un graf este conex dacă şi numai dacă are o singură componentă conexă.

Demonstraţiile acestor două teoreme sunt analoage cu cele ale teoremelor 1.2.1 şi 1.2.2 din paragraful anterior.

Exemple

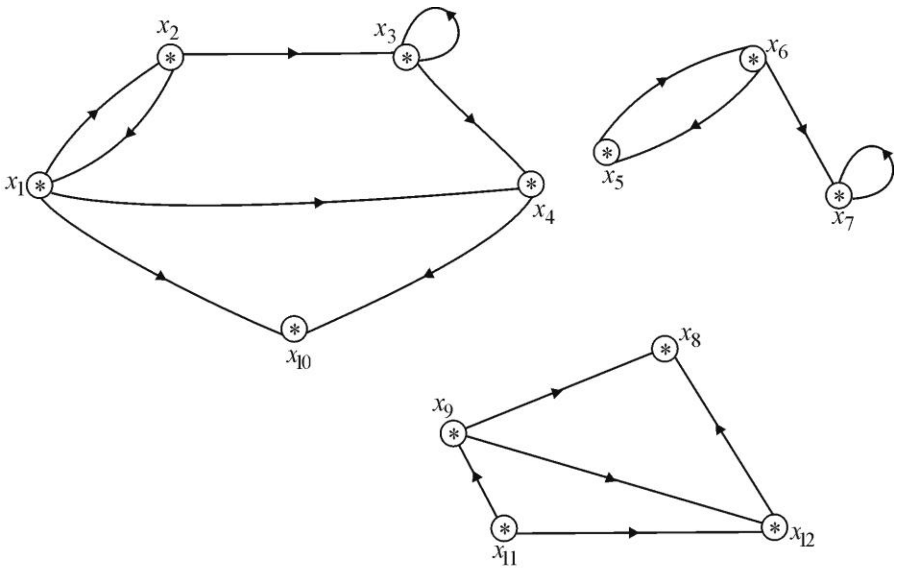


Fig. 1.3.1

Graful $G=(X,\Gamma)$ din figura 1.3.1 este dat în reprezentare sagitală. Mulţimea *X* a vârfurilor sale este: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12}\}$. Aplicaţia $\Gamma : X \to P(X)$ este definită prin:

$\Gamma(x_1)=\{x_2,x_4,x_{10}\}$; $\Gamma(x_2)=\{x_1,x_3\}$; $\Gamma(x_3)=\{x_3,x_4\}$; $\Gamma(x_4)=\{x_{10}\}$;

$\Gamma(x_5)=\{x_6\}$; $\Gamma(x_6)=\{x_5,x_7\}$; $\Gamma(x_7)=\{x_7\}$; $\Gamma(x_8)=\{\varnothing\}$;

$\Gamma(x_9)=\{x_8,x_{12}\}$; $\Gamma(x_{10})=\{\varnothing\}$; $\Gamma(x_{11})=\{x_9,x_{12}\}$; $\Gamma(x_{12})=\{x_8\}$.

Acest graf este neconex deoarece nu există, de exemplu, nici un lanţ care să lege vârfurile x_1 şi x_6.

Graful are trei componente conexe. Partiţia corespunzătoare a mulţimii vârfurilor $X=\{x_1,x_2,...,x_{12}\}$ este formată din submulţimile:

$C(x_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_{10}\}$; $C(x_5)=\{x_5,x_6,x_7\}$; $C(x_{11})=\{x_{11},x_9,x_8,x_{12}\}$.

Subgrafurile determinate de aceste mulţimi sunt prezentate în aceeaşi figură, 1.3.1 şi pot fi privite ca grafuri independente.

Grafurile de care ne vom ocupa în continuare vor fi conexe, acesta fiind cazul întâlnit în aplicaţiile practice. Dacă totuşi un anumit proces sau fenomen este modelat printr-un graf neconex, atunci proprietăţile care ne interesează sunt studiate pentru fiecare componentă conexă a grafului considerată ca un graf independent.

1.4 Succesori şi predecesori

Fie $G=(X,\Gamma)$ un graf şi $x,y\in X$. Spunem că *y* este un **succesor** al lui *x* sau că *x* este un **predecesor** al lui *y* dacă există în graful G un drum de la *x* la *y*.

Dacă aceste drum este format din *k* arce de la *x* la *y* spunem că *y* este un **succesor de ordinul *k*** al lui *x* sau că x este un **predecesor de ordinul *k*** al lui *y*. Dacă $x\in X$, atunci $\Gamma^k(x)$ este mulţimea succesorilor de ordinul *k* ai vârfului *x*, iar $\Gamma^{-k}(x)$ este mulţimea predecesorilor de ordinul *k* ai lui *x* în graful *G*. Graful notat prin $G^k=\left(X,\Gamma^k\right)$ se numeşte graful succesiunilor de ordinul *k* ale grafului *G*.

Definiţia 1.4.1

Fie $G=(X,\Gamma)$ un graf şi $x\in X$. Vom numi **închiderea tranzitivă a vârfului *x*** mulţimea $\hat{\Gamma}(x)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Gamma^k(x)$; $\left(\Gamma^0(x)=x\right)$.

Mulţimea $\hat{\Gamma}(x)$ este formată din vârful *x* şi toţi succesorii săi din graful *G*. Graful $\hat{G}=\left(X,\hat{\Gamma}\right)$ se numeşte închiderea tranzitivă a grafului $G=(X,\Gamma)$.

Analog, mulţimea $\hat{\Gamma}^{-1}(x)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Gamma^{-k}(x)$ se numeşte închiderea tranzitivă inversă a vârfului *x* şi este formată din vârful *x* şi din mulţimea tuturor predecesorilor lui *x* în graful *G*.

Dacă pentru orice $x\in X$ are loc egalitatea $\hat{\Gamma}(x)=X$ atunci graful este tare conex şi reciproc.

Teorema 1.4.2

Într-un graf finit fără circuite există cel puţin un vârf fără succesori şi cel puţin un vârf fără predecesori.

Demonstraţie

Fie $G=(X,\Gamma)$ un graf finit, fără circuite şi $x\in X$ arbitrar. Dacă *x* nu are nici un succesor afirmaţia din prima parte a teoremei este, evident, adevărată. Să presupunem că *x* are cel puţin un succesor şi fie x_1, $(x_1\neq x)$ unul dintre aceştia. Mai departe, dacă x_1 nu are succesori, teorema este verificată. În caz contrar, fie x_2 un succesor al lui x_1. Evident, $x_2\notin\{x,x_1\}$ şi raţionamentul se continuă în acelaşi mod. Deoarece graful este finit, procesul de alegere a vârfurilor distincte $x,x_1,x_2,...$ cu x_{k+1} succesor al lui x_k, $(\forall)$ $k\geq 0(x\equiv x_0)$, va duce după un număr finit de paşi, la un vârf fără succesori. Analog se demonstrează şi a doua partea teoremei, respectiv existenţa cel puţin a unui vârf fără predecesori.

1.5 Împărţirea unui graf fără circuite în nivele

Fie $G=(X,\Gamma)$ un graf finit, fără circuite. Conform teoremei 1.4.2, mulţimea vârfurilor fără predecesori este nevidă. Definim nivelul 1 al grafului ca fiind format tocmai din această mulţime, a vârfurilor fără predecesori. În continuare se determină subgraful G_1, obţinut din *G* prin suprimarea vârfurilor nivelului 1. Acest subgraf este, de asemenea, fără circuite. Definim nivelul 2 al grafului *G* ca fiind mulţimea vârfurilor fără predecesori ai grafului G_1 ($\Leftrightarrow$ nivelul 1 al lui G_1).

Procedeul se continuă până când se ajunge la mulţimea vârfurilor fără succesori, aceasta formând ultimul nivel al grafului. De menţionat că procesul de obţinere a nivelurilor se poate desfăşura şi în sens invers, începând cu obţinerea în prima fază a ultimului nivel, adică a mulţimii vârfurilor fără succesori şi apoi, succesiv a celorlalte nivele.

Exemplul 1.5.1

Fie graful finit şi fără circuite din figura 1.5.1. Ne propunem să-l împărţim în nivele.

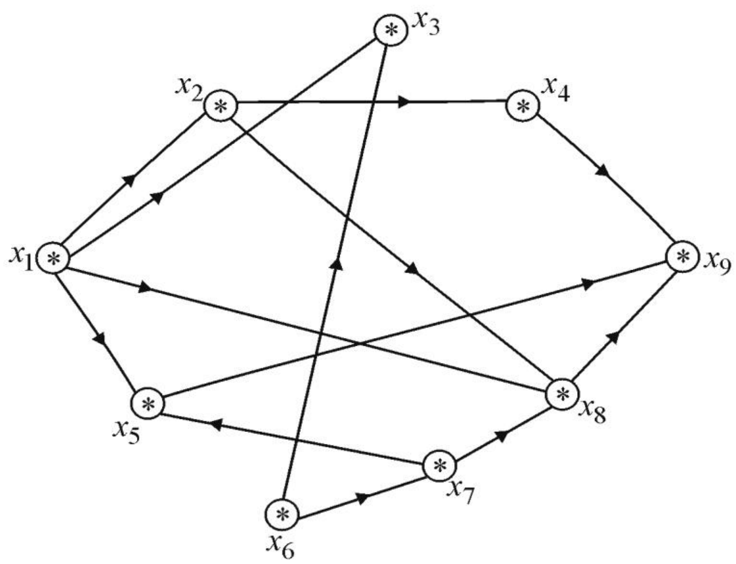


Fig. 1.5.1

Căutăm mai întâi mulţimea vârfurilor care nu au predecesori. Găsim $X_1 = \{x_1, x_6\}$. X_1 va forma primul nivel. Construim subgraful obţinut prin suprimarea vârfurilor din mulţimea X_1 şi tuturor arcelor care au o extremitate în aceste vârfuri. Se obţine graful din figura 1.5.2.

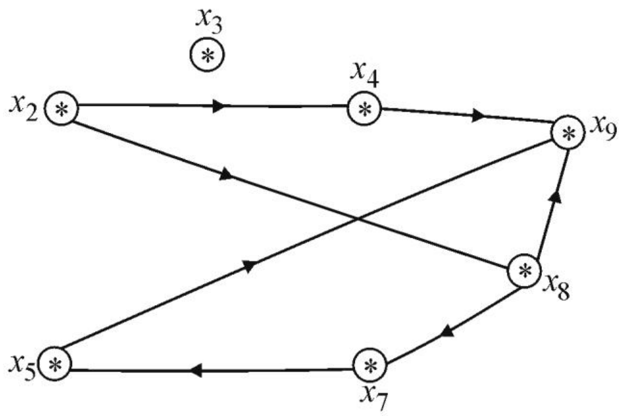


Fig. 1.5.2

Mulţimea vârfurilor care nu au predecesori din acest subgraf este $X_2 = \{x_2, x_3, x_7\}$ şi va forma nivelul al doilea al grafului *G*. Subgraful obţinut prin suprimarea vârfurilor din mulţimea X_2 şi a tuturor arcelor care au o extremitate în aceste vârfuri este prezentată în fig. 1.5.3.

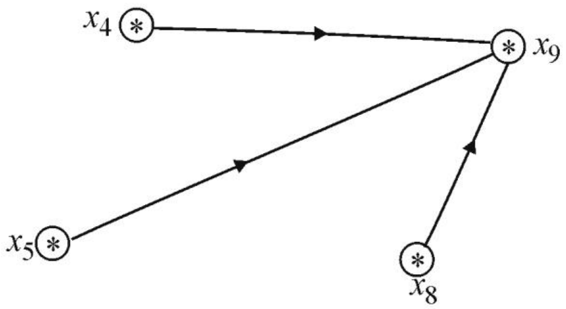


Fig. 1.5.3

Mulţimea vârfurilor care nu au predecesori din acest subgraf este $X_3 = \{x_4, x_5, x_8\}$ şi va forma al treilea nivel.

Ultimul nivel va fi format numai din vârful x_9, singurul care nu are nici un succesor.

Graful iniţial se poate redesena, punând pe o aceeaşi dreaptă verticală toate vârfurile situate pe acelaşi nivel.

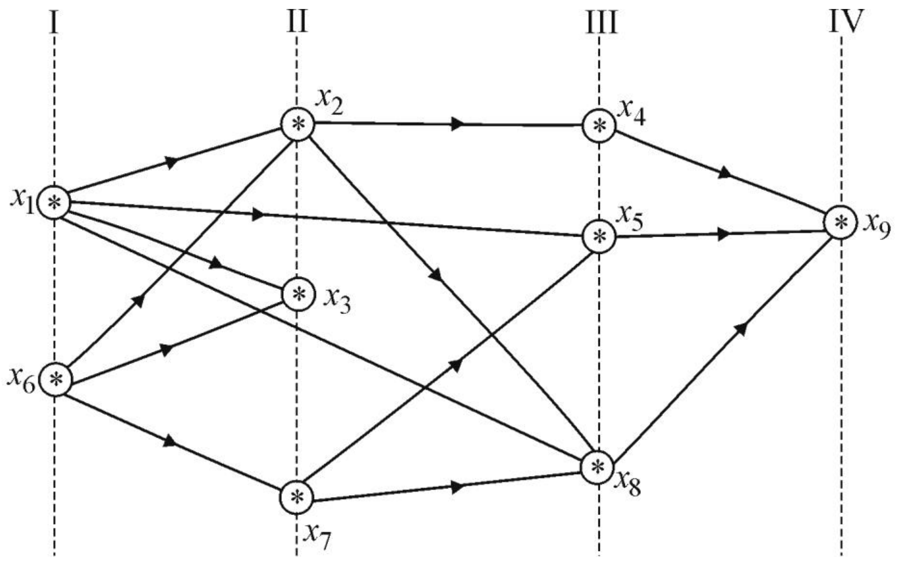


Fig. 1.5.4

Mai observăm că nivelele formează o partiţie a lui X.

La algoritmul de împărţire a unui graf finit fără circuite se mai poate adăuga o condiţie. De exemplu, se poate cere ca toţi succesorii unui vârf x să se afle în nivelul imediat următor (sau implicit, toţi predecesorii lui x să se afle pe nivelul imediat anterior). Fără o astfel de condiţie este posibil să se poată obţine împărţiri diferite pe nivele ale aceluiaşi graf, cu structuri diferite ale mulţimilor vârfurilor pe nivelele respective.

În exemplul anterior, în absenţa ultimei condiţii, vârful x_3 de pe nivelul 2 se poate plasa pe nivelul 3 sau pe nivelul 4, obţinându-se reprezentări diferite de cea din figura 1.5.4, cu structuri diferite ale mulţimilor vârfurilor de pe nivelele 2, respectiv 3 sau 4.

LECŢIA 4 - MATRICI BOOLEENE ASOCIATE GRAFURILOR

2.1 Matricea de adiacenţă asociată unui graf.

Definiţia 2.1.1

O matrice $A \in M_n(\square)$ se numeşte **matrice booleană** dacă orice element al său este fie 0, fie 1.

Fie $G=(X,U)$ un graf dat prin mulţimea vârfurilor sale $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi mulţimea *U* a arcelor sale. Putem pune în evidenţă legăturile dintre vârfurile grafului G cu ajutorul unei matrice $A=(a_{ij}),\ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, definită astfel:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 \quad \text{dacă} \quad (x_i, x_j) \in U \\ 0 \quad \text{dacă} \quad (x_i, x_j) \notin U \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Este evident că matricea *A* este o matrice booleană numită matricea booleană ataşată grafului *G* sau matricea conexă ataşată lui *G*. Oricărui graf *G* i se poate asocia o unică matrice booleană în acest mod şi reciproc, oricărei matrice booleene $A=(a_{ij}),\ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ i se poate asocia un graf $G=(X,U)$.

Exemple

a) Fie graful *G* din figura 2.1.1, dat în reprezentare sagitală.

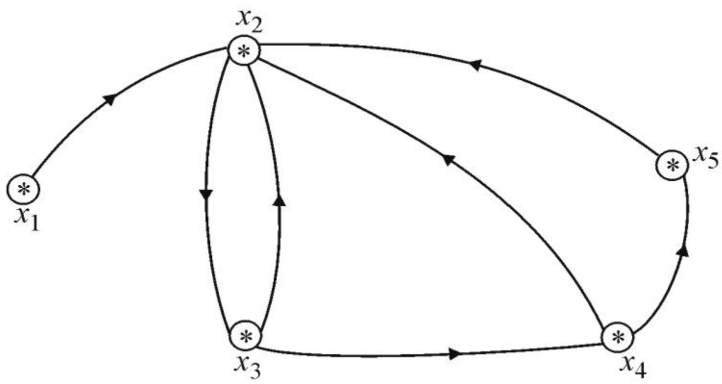


Fig. 2.1.1

Matricea conexă sau matricea booleană asociată acestui graf se completează conform relaţiei (2.1.1) şi este următoarea:

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} = A$$

b) Fie matricea booleană următoare:

$$
A = \begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Această matrice determină în mod unic un graf. Mulţimea U a arcelor acestuia este $U = \left\{ \begin{array}{l} (x_1,x_2),(x_1,x_6),(x_2,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_4), \\ (x_4,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_3),(x_6,x_2),(x_6,x_3),(x_6,x_5) \end{array} \right\}$, iar reprezentarea sa sagitală este prezentată în fig. 2.1.2.

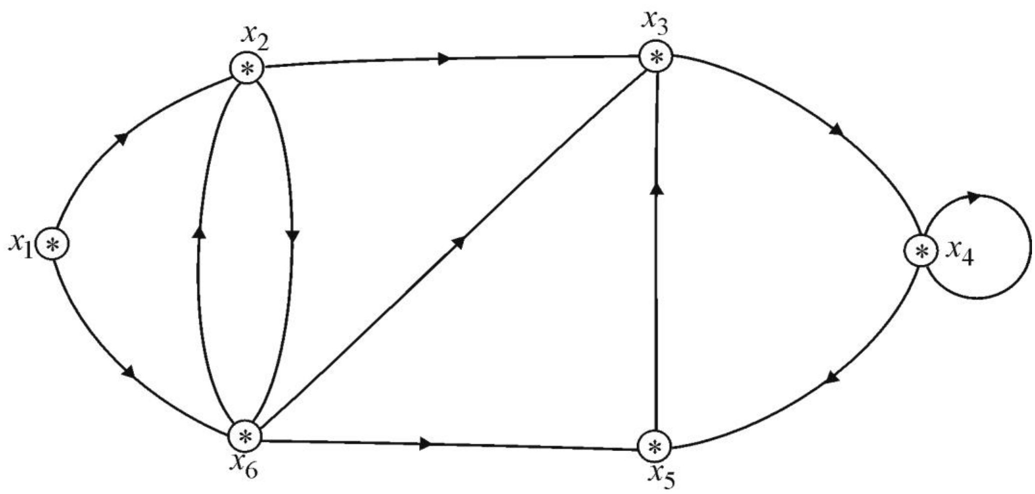


Fig. 2.1.2

Unele proprietăţi ale grafului $G = (X, U)$ pot fi caracterizate mai uşor cu ajutorul matricei booleene asociate. Astfel, dacă $a_{ii} = 1$ înseamnă că în vârful x_i graful are o buclă; matricea asociată unui graf fără nici o buclă are numai valoarea 0 pe diagonala principală.

Dacă matricea $A = (a_{ij})$ este simetrică $\left(a_{ij} = a_{ji},\ (\forall)\, i, j \in 1, 2, ..., n\right)$ atunci graful său asociat este simetric şi reciproc.

O matrice $A = (a_{ij})$ cu $a_{ij} = 1,\ (\forall)\, i, j \in 1, 2, ..., n$ caracterizează un graf plin. Un graf este antisimetric dacă $a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = 0$ şi complet dacă $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 1,\ (\forall)\, i, j \in 1, 2, ..., n$. Un graf este neconex dacă matricea booleană asociată a sa are forma diagonală pe blocuri sau poate fi adusă la forma diagonală prin renumerotarea vârfurilor (ceea ce este echivalent cu permutarea corespunzătoare a liniilor şi coloanelor matricei booleene asociate). Fie, de exemplu, graful din fig. 1.3.1 (pag. 8, cap. 1), reluat în fig. 2.1.3.

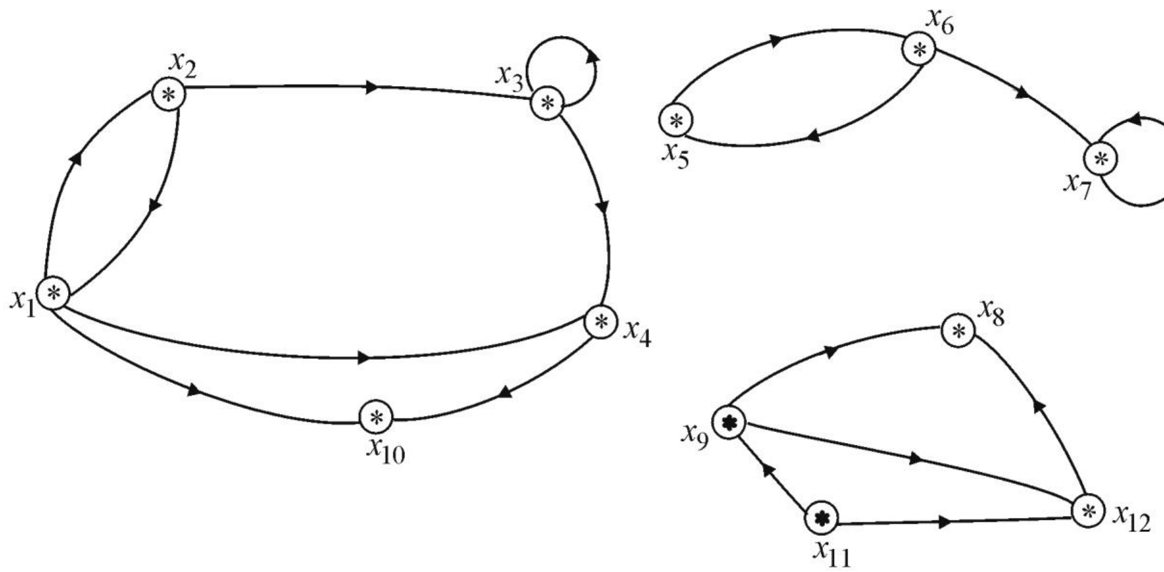


Fig. 2.1.3

Acest graf este neconex (conţine vârfuri nelegate prin nici un arc) şi are trei componente conexe.

Matricea booleană asociată acestui graf este următoarea:

$$A=\begin{array}{c|cccccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_{10} & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{11} & x_{12} & g^+(x_i)\\
x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\
x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\\
x_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
g^-(x_i) & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Matricele scoase în evidenţă pe diagonala matricei *A* sunt matrice booleene ataşate componentelor conexe ale grafului, considerate ca grafuri separate.

Tot cu ajutorul matricei booleene asociate unui graf se pot caracteriza şi pune în evidenţă anumite concepte legate de clasificarea vârfurilor unui graf. Am definit, astfel, gradul unui vârf $x \in X$ ca fiind numărul muchiilor care au o extremitate în vârful *x* şi l-am notat cu $g(x)$. Într-un graf orientat se mai pot defini câteva noţiuni legate de clasificarea vârfurilor sale, utile în stabilirea altor rezultate în teoria grafurilor.

Definiţia 2.1.2

a) Se numeşte **grad de emisie** sau **grad de ieşire** sau **grad local exterior** al unui vârf $x \in X$ şi se notează cu $g^+(x)$, numărul arcelor care au extremitatea iniţială în vârful x.

Astfel, dacă $U^+(x) =$ mulţimea arcelor din graful *G* care au extremitatea iniţială în vârful $x \in X$,

$$U^+(x) = \{(x,y) \in U \mid y \in \Gamma(x)\}, \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

atunci

$$g^+(x) = \operatorname{card}\left(U^+(x)\right). \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

b) Se numeşte **grad de recepţie** sau **grad de intrare** sau **grad local interior** în vârful $x \in X$ şi se notează cu $g^-(x)$, numărul arcelor care au extremitatea finală în vârful *x*.

Astfel, dacă $U^-(x) =$ mulţimea arcelor din graful *G* care au extremitatea finală în vârful $x \in X$,

$$U^-(x) = \{(y,x) \in U \mid x \in \Gamma(y)\}, \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

atunci

$$g^-(x) = \operatorname{card}\left(U^-(x)\right). \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

Rezultă atunci că gradul vârfului *x* este

$$g(x) = g^+(x) + g^-(x). \qquad \textbf{(2.1.6)}$$

Definiţia 2.1.3

a) Un vârf $x \in X$ se numeşte **punct de emisie** sau **sursă** sau **punct de ieşire** dacă: $g^+(x) > 0$ şi $g^-(x) = 0$, adică $U^-(x) = \varnothing$. ($\Leftrightarrow$ *toate* arcele incidente în *x* au ca extremitate *iniţială* vârful *x* $\Leftrightarrow$ vârful *x* nu are predecesori).

b) Un vârf $x \in X$ se numeşte **punct de recepţie** sau **destinaţie** sau **punct de intrare** dacă: $g^+(x) = 0$ şi $g^-(x) > 0$, adică $U^+(x) = \varnothing$ ($\Leftrightarrow$ *toate* arcele incidente în *x* au ca extremitate *finală* vârful *x* $\Leftrightarrow$ vârful *x* nu are succesori).

c) Un vârf $x \in X$ se numeşte **punct intermediar** dacă $g^+(x) > 0$ şi $g^-(x) > 0$.

d) Un vârf $x \in X$ se numeşte **punct izolat** dacă $g^+(x) = g^-(x) = 0$.

În cazul reprezentării unui graf prin matricea booleană asociată gradul de emisie al unui vârf $x \in X$ este dat de suma elementelor din linia corespunzătoare lui *x* din matricea *A*, iar gradul de recepţie al vârfului $x \in X$ este dat de suma elementelor din coloana corespunzătoare lui *x* din matricea *A*. În graful din fig. 2.1.3, analizând valorile $g^-(x_i)$ şi $g^+(x_i)$ $(\forall)$ $i = 1,2,\ldots,12$, trecute pe o linie, respectiv coloană suplimentară a matricei booleene asociate *A*, constatăm că

$g^{-}(x_{11})=0$, deci vârful x_{11} este punct sursă (fără predecesori) şi $g^{+}(x_8)=g^{+}(x_{10})=0$, deci vârfurile x_8 şi x_{10} sunt puncte de recepţie (fără succesori).

Definiţia 2.1.4

Un **graf planar** este un graf *G* ale cărui vârfuri se pot reprezentat prin puncte în plan şi ale cărui muchii sau arce (după cum graful este neorientat sau orientat) se pot reprezenta prin arce de curbă astfel încât oricare două arce de curbă au în comun cel mult unul sau două puncte, acestea fiind numai puncte de extremitate.

Definiţia 2.1.5

Se numeşte **reţea de transport** un graf orientat, conex, fără bucle, cu următoarele proprietăţi:

a) există în graf un singur vârf $x_0 \in X$ *de tip sursă* (fără predecesori), numit **intrarea în reţea**;

b) există în graf un singur vârf $x_n \in X$ *de tip destinaţie* (fără succesori), numit **ieşirea din reţea**;

c) există o funcţie $C: U \to \mathbb{R}^{+}$, care asociază fiecărui arc $(x_i, x_j) \in U$ un număr pozitiv (o valoare) $c(u)=c_{ij}$ numit **capacitatea arcului** (x_i, x_j). O reţea de transport se notează prin $R(X,U,C,x_0,x_n)$.

Alături de matricea booleană *A* (sau matricea conexă), unui graf i se mai poate asocia şi o altă matrice cu ajutorul căreia se pot studia *legăturile dintre vârfurile grafului*.

2.2 Matricea drumurilor asociată unui graf

Definiţia 2.1.6

Se numeşte m**atricea drumurilor (matricea conexă terminală)** asociată unui graf $G=(X,\Gamma)$, matricea $T=(t_{ij})$, $i,j=1,2,...,n$, definită prin:

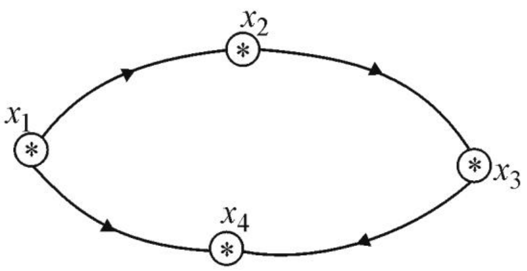
$$t_{ij}=\begin{cases}1 & \text{dacă există în graf un drum de la } x_i \text{ la } x_j\\ 0 & \text{dacă nu există în graf un drum de la } x_i \text{ la } x_j\end{cases} \qquad \textbf{(2.1.7)}$$

Dacă matricea booleană *A* asociată unui graf *G* determină în mod unic graful, aceeaşi matrice conexă terminală *T* poate fi ataşată la mai multe grafuri diferite.

Exemplu

Grafurile din fig. 2.1.4 a şi 2.1.4 b sunt diferite dar au aceeaşi matrice conexă terminală,

$$T=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$



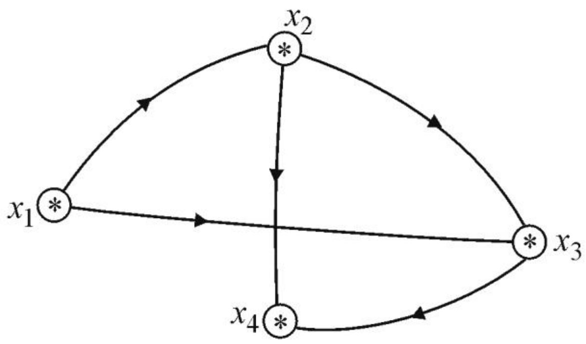


Fig. 2.1.4

În continuare vom prezenta câteva proprietăţi şi aplicaţii ale matricei conexe terminale *T* asociată unui graf $G=(X,\Gamma)$ cu *n* vârfuri.

Propoziţia 2.1.7

Un element t_{ij}, $i \neq j$ din matricea conexă terminală a unui graf $G=(X,\Gamma)$ cu *n* vârfuri este egal cu 1 dacă şi numai dacă

$$x_j \in \bigcup_{k=1}^{n-1} \Gamma^k(x_i). \qquad \textbf{(2.1.8)}$$

Demonstraţie

Rezultă din definiţia drumului dintre cele două vârfuri x_i şi x_j ale grafului *G*, $i \neq j$, şi din faptul că relaţia (2.1.8) arată că x_j face parte din închiderea tranzitivă până la ordinul $n-1$ a vârfului x_i ($\Leftrightarrow$ mulţimea succesorilor până la ordinul $n-1$ ai lui x_i).

Pentru determinarea matricei conexe terminale *T* plecând de la matricea booleană asociată *A*, este necesar să reamintim definiţia adunării booleene. Această operaţie este o lege de compoziţie internă pe mulţimea $\{0,1\}$ şi are următoarea tabelă:

$\dot{\oplus}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Vom prezenta algoritmul lui Chen de determinare a matricei conexe terminale *T*, plecând de la matricea booleană *A* asociată grafului cu n vârfuri $G=(X,\Gamma)$, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

2.3 Algoritmi pentru determinarea matricei drumurilor şi a unor drumuri speciale în grafuri

Algoritmul lui Y. C. Chen

1. Fie $a_{1i_1}, a_{1i_2}, ..., a_{1i_m}$ elementele diferite de zero de pe linia 1 a matricei *A*. Adunăm boolean liniile $i_1, i_2, ..., i_m$ la linia 1.

2. Dacă în urma efectuării operaţiilor de la pasul 1 au apărut alte elemente diferite de zero pe linia 1, fie acestea $a_{1j_1}, a_{1j_2}, \dots, a_{1j_k}$. Adunăm boolean liniile $j_1, j_2, \dots, j_k$ la linia 1.

3. Se repetă pasul 2 până când se ajunge la una din următoarele situaţii:

– toate elementele liniei 1 sunt egale cu 1;

– nu se mai pot genera alte elemente diferite de zero pe linia 1.

4. Paşii 1, 2 şi 3 se repetă pentru fiecare linie.

În final se obţine matricea conexă terminală *T*. Dacă în matricea conexă terminală *T* ataşată unui graf toate elementele t_{ii}, $i=1,2,\dots,n$ de pe diagonala principală sunt egale cu 0, atunci graful respectiv este fără circuite, iar dacă există cel puţin două elemente t_{jj} şi $t_{\ell\ell}$ egale cu 1 pe diagonala principală, graful are cel puţin un circuit care conţine vârfurile x_j şi x_ℓ. Dacă există un singur element $t_{kk}=1$ pe diagonala principală a matricei *T*, atunci există o buclă în vârful x_k.

Definiţia 2.1.8

Se numeşte **putere de atingere** a unui vârf x_i şi se notează cu $p(x_i)$ numărul maxim de vârfuri care pot fi atinse de la x_i. Evident,

$$p(x_i)=\sum_{j=1}^{n} t_{ij},\ i=1,2,\dots,n \qquad \textbf{(2.1.9)}$$

şi reprezintă suma elementelor din linia lui x_i a matricei conexe terminale *T*.

Calculăm puterile de atingere ale tuturor vârfurilor grafului *G* însumând elementele nenule de pe liniile corespunzătoare din matricea *T* şi permutăm liniile lui *T* astfel încât puterile de atingere ale vârfurilor sale să fie în ordine descrescătoare.

Astfel, dacă $p(x_{k_1}) \ge p(x_{k_2}) \ge p(x_{k_3}) \ge \dots \ge p(x_{k_n})$, atunci ordinea vârfurilor devine: $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots, x_{k_n}$.

Fie σ permutarea care corespunde acestei ordini a vârfurilor grafului:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.1.10)}$$

Are loc rezultatul următor:

Teorema 2.1.9

Fie $G=(X,U)$ un graf orientat şi fără circuite şi *T* matricea conexă terminală a sa. Matricea T' obţinută din matricea *T* prin ordonarea liniilor astfel încât puterile de atingere ale vârfurilor sale să fie în ordine descrescătoare şi apoi prin aşezarea coloanelor în aceeaşi ordine este o matrice superior triunghiulară.

Această teoremă este deosebit de importantă pentru că oferă un criteriu cu ajutorul căruia se poate stabili dacă într-un graf orientat şi fără circuite există sau nu un drum hamiltonian şi totodată şi un algoritm pentru determinarea drumului hamiltonian în cazul în care există. De asemenea, permite determinarea rutelor optimale într-un graf, aflarea drumului critic etc.

Teorema 2.1.10 (Y. C. Chen)

Un graf cu *n* vârfuri $G=(X,U)$ orientat şi fără circuite conţine un drum hamiltonian dacă şi numai dacă numărul elementelor diferite de zero din matricea conexă terminală *T* este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstraţie

Fie $G=(X,\Gamma)$ un graf orientat şi fără circuite, cu *n* vârfuri.

„$\Rightarrow$" Presupunem că în *G* există un drum hamiltonian $d_H=\left(x_{k_1},x_{k_2},x_{k_3},...,x_{k_n}\right)$, corespunzând permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$. Deoarece graful nu are circuite rezultă că x_{k_1} atinge $n-1$ vârfuri, deci pe linia lui x_{k_1} din matricea conexă terminală *T* sunt $n-1$ elemente egale cu 1. La fel, vârful x_{k_2} atinge $n-2$ vârfuri, deci linia corespunzătoare lui x_{k_2} din *T* are $n-2$ elemente egale cu 1 şi tot astfel, pentru fiecare vârf următor al drumului hamiltonian, numărul de elemente egale cu 1 din linia corespunzătoare a matricei *T* scade cu câte o unitate, până la vârful x_{k_n} care este ultimul vârf al drumului hamiltonian şi deci are puterea de atingere zero (în caz contrar s-ar contrazice ipoteza că graful este fără circuite). Prin urmare, numărul total de elemente având valoarea 1 din matricea *T* este suma unei progresii aritmetice de raţie $r=1$, adică:

$$(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{n(n-1)}{2} \qquad \textbf{(2.1.11)}$$

„$\Leftarrow$" Presupunem că suma cifrelor 1 din matricea *T* este egală cu $\frac{n(n-1)}{2}$, ea reprezentând totodată suma puterilor de atingere ale tuturor vârfurilor grafului. Considerăm forma triunghiulară superioară T' obţinută în urma efectuării operaţiilor precizate în teorema 2.1.9 şi notăm $x_1',x_2',...,x_n'$ vârfurile obţinute prin permutarea σ (relaţia 2.1.10) a vârfurilor $x_1,x_2,...,x_n$ în ordinea descrescătoare a puterilor lor de atingere. Deoarece graful nu are circuite, în matricea T' toate elementele egale cu 1 se află deasupra diagonalei principale şi cum deasupra diagonalei principale se află în total: $(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ locuri, rezultă că nici o cifră zero nu se va afla deasupra diagonalei principale. Putem scrie o succesiune de arce corespunzând primului element diferit de zero din fiecare linie: $(x_1',x_2'),(x_2',x_3'),...,(x_{n-1}',x_n')$. Această succesiune de arce formează tocmai drumul hamiltonian $d_H=(x_1',x_2',...,x_n')$.

Teorema 2.1.11

Dacă într-un graf $G=(X,\Gamma)$ orientat şi fără circuite există un drum hamiltonian, atunci acesta este unic.

Demonstraţie

Fie $G=\left(X,\Gamma\right)$ un graf orientat şi fără circuite, cu *n* vârfuri. Presupunem că în graful *G* există un drum hamiltonian. Fie $d_H=\left(x_1',x_2',\ldots,x_n'\right)$ acest drum, unde succesiunea vârfurilor este dată de ordinea descrescătoare a puterilor de atingere a lor. Orice altă succesiune a vârfurilor conţine cel puţin o inversare a indicilor. Presupunem prin absurd că în *G* ar exista şi un alt drum hamiltonian d_H' diferit de d_H. Rezultă că acesta conţine cel puţin un arc de forma $\left(x_i',x_j'\right)$, cu $j<i$, adică linia vârfului x_j' precede linia vârfului x_i' în T', astfel că $t_{ji}'=1$, deci este situat deasupra diagonalei principale în T'. Rezultă de aici existenţa unui drum de la x_j' la x_i', cu $j<i$. Însă, conform presupunerii făcute, succesiunea arcelor din d_H' conţine arcul $\left(x_i',x_j'\right)$, de unde rezultă că graful ar avea un circuit, contradicţie cu ipoteza. Prin urmare, presupunerea că drumul hamiltonian nu este unic este falsă.

Rezultatul formulat şi demonstrat în teorema 2.1.10 este uşor de verificat pe matricea T' obţinută din matricea conexă terminală *T* în urma efectuării operaţiilor precizate în teorema 2.1.9.

Algoritmul de determinare a drumului hamiltonian (atunci când acesta există) într-un graf orientat şi fără circuite presupune următorii paşi:

1. Fiind dat graful orientat şi fără circuite $G=\left(X,\Gamma\right)$ se construieşte matricea conexă asociată *A* conform relaţiei (2.1.1) şi matricea conexă terminală *T*, conform cu relaţia (2.1.7) sau conform algoritmului lui Chen. Dacă numărul elementelor diferite de zero din matricea conexă terminală *T* este egal cu $\frac{n\left(n-1\right)}{2}$, atunci în graful *G* există un drum hamiltonian (teorema 2.1.10) şi acesta este unic (teorema 2.1.11).

2. Se calculează puterile de atingere ale vârfurilor grafului însumând (sau numărând elementele nenule) de pe liniile corespunzătoare ale matricei conexe terminale *T*; pentru fiecare vârf x_i puterea de atingere a sa se va completa într-o coloană suplimentară (a $n+1$- a) a matricei *T*.

3. Se construieşte matricea T' conform procedeului descris în teorema 2.1.9. Conform rezultatelor expuse anterior rezultă că matricea T', asociată grafului finit $G=\left(X,\Gamma\right)$ orientat şi fără circuite şi care are un drum hamiltonian, este superior triunghiulară, toate elementele de pe diagonala sa principală şi de sub ea sunt nule, iar cele de deasupra diagonalei principale sunt egale cu 1.

4. Drumul hamiltonian se citeşte în matricea T' prin *succesiunea arcelor corespunzătoare elementelor egale cu 1 aflate deasupra diagonalei principale*.

Exemplu

Pentru graful din fig. 2.1.4 matricea conexă terminală este:

$$T=\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & p\left(x_i\right)\\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$ şi coincide cu T'.

Numărul elementelor egale cu 1 din T este $N = 6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$ $\Leftrightarrow$ în G există un drum hamiltonian.

Succesiunea arcelor corespunzătoare elementelor egale cu 1 aflate deasupra diagonalei principale reprezintă drumul hamiltonian din G şi acesta este: $d_H = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, succesiunea arcelor sale fiind: (x_1, x_2); (x_2, x_3); (x_3, x_4).

LECŢIA 5 - OPERAŢII CU GRAFURI ŞI CU MATRICI BOOLEENE ASOCIATE GRAFURILOR

2.2 a) Adunarea booleană şi reuniunea grafurilor

Pe mulţimea $\{0,1\}$ definim următoarea operaţie:

$$a \dot{\oplus} b = \max\{a,b\} \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Tabela acestei legi de compoziţie este următoarea:

$\dot{\oplus}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Este evident că această operaţie, numită adunarea booleană, este asociativă şi comutativă. Cu ajutorul ei putem defini operaţia de adunare booleană a matricelor booleene de acelaşi ordin.

Definiţia 2.2.1

Fie $A=(a_{ij})$ şi $B=(b_{ij})$ două matrice booleene de acelaşi ordin, *n*. Atunci matricea $C=(c_{ij})$, definită prin:

$$c_{ij} = a_{ij} \dot{\oplus} b_{ij}, \ (\forall)\ i, j = 1,2,..,n, \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

este tot o matrice booleană de acelaşi ordin, se numeşte **suma booleană** a matricelor *A* şi *B* şi se notează:

$$C = A \dot{\oplus} B. \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

Definiţia 2.2.2

Fie $G_1=(X,\Gamma_1)$ şi $G_2=(X,\Gamma_2)$ două grafuri având aceeaşi mulţime *X* a vârfurilor. Graful $G = G_1 \vee G_2 = (X, \Gamma_1 \vee \Gamma_2)$, unde

$(\Gamma_1 \vee \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \bigcup \Gamma_2(x)$, $(\forall)\ x \in X$ se numeşte **graful reuniune** a celor două grafuri, iar graful $H = G_1 \wedge G_2 = (X, \Gamma_1 \wedge \Gamma_2)$, unde

$(\Gamma_1 \wedge \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(x)$, $(\forall)\ x \in X$ se numeşte **graful intersecţie** a celor două grafuri.

Din definiţia celor două grafuri *G* şi *H* rezultă că (x,y) este arc în *G* dacă şi numai dacă este arc în G_1 sau G_2 şi (x,y) este arc în *H* dacă şi numai dacă este arc în G_1 şi G_2.

Astfel spus, dacă $G_1=(X,U_1)$ şi $G_2=(X,U_2)$, atunci mulţimea arcelor grafului $G = G_1 \vee G_2$ este $U_1 \bigcup U_2$, iar mulţimea arcelor grafului $H = G_1 \wedge G_2$ este $U_1 \bigcap U_2$. Dacă $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$, atunci toate elementele lui *X* sunt puncte izolate ale garfului $H = G_1 \wedge G_2$. Este evident că operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ sunt asociative şi comutative.

Propoziţia 2.2.3

Fie A_1 şi A_2 matricele booleene ataşate grafurilor $G_1 = (X, \Gamma_1)$ şi $G_2 = (X, \Gamma_2)$. Atunci matricea $A = A_1 \dot{\oplus} A_2$ este matricea booleană ataşată garfului $G = G_1 \vee G_2$.

Demonstraţia este imediată şi o lăsăm ca exerciţiu.

*b) **Înmulţirea booleană şi produsul de compoziţie al grafurilor***

Pe aceeaşi mulţime $\{0,1\}$ definim şi operaţia:

$$a \dot{\otimes} b = \min\{a, b\}. \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

Tabela acestei legi de compoziţie este următoarea:

$\dot{\otimes}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Operaţia se numeşte înmulţirea booleană şi pe mulţimea $\{0,1\}$ coincide cu înmulţirea obişnuită. Înmulţirea booleană este distributivă faţă de adunarea booleană. Cu ajutorul operaţiei de înmulţire booleană vom defini produsul boolean al matricelor booleene.

Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0,1\}$ vom nota suma lor booleană astfel:

$$a_1 \dot{\oplus} a_2 \dot{\oplus} ... \dot{\oplus} a_n = \dot{\sum_{i=1}^{n}} a_i = \dot{\sum_i} a_i\,, \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

dacă *n* este subînţeles.

Definiţia 2.2.4

Fie $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, două matrice booleene. Atunci matricea $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, unde

$$c_{ij} = \dot{\sum_k} (a_{ik} \dot{\otimes} b_{kj}) = \dot{\sum_k} a_{ik} b_{kj} \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

este tot o matrice booleană, se numeşte **produsul boolean** al matricelor *A* şi *B* şi se notează:

$$C = A \dot{\otimes} B. \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

Acest produs definit pe mulţimea matricelor booleene pătratice de acelaşi ordin este asociativ şi distributiv faţă de adunarea booleană a matricelor.

Definiţia 2.2.5

Fie grafurile $G_1 = (X, \Gamma_1)$ şi $G_2 = (X, \Gamma_2)$, având aceeaşi mulţime *X* a vârfurilor. Spunem că graful $G = (X, \Gamma)$ este **produsul de compoziţie** al grafurilor G_1 şi G_2 şi scriem $G = G_2 \circ G_1 = G_2 G_1$, respectiv $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1 = \Gamma_2 \Gamma_1$, dacă

$$\Gamma(x)=\bigcup_{y\in\Gamma_1(x)}\Gamma_2(y),\ (\forall)\ x\in X\ , \tag{2.2.8}$$

relaţie care se mai scrie şi astfel:

$$(\Gamma_2\Gamma_1)(x)=\Gamma_2(\Gamma_1(x)) \tag{2.2.9}$$

Definiţia 2.2.6

Fiind dat un graf $G=(X,\Gamma)$, se numeşte **graful reciproc** al lui *G* graful notat prin $G^{-1}=\left(X,\Gamma^{-1}\right)$, unde

$$\Gamma^{-1}(y)=\{x\in X\mid y\in\Gamma(x)\}=\{x\in X\mid (x,y)\in U\} \tag{2.2.10}$$

Reprezentarea sagitală a grafului reciproc al lui *G* se obţine din reprezentarea sagitală a lui *G* prin schimbarea sensului arcelor.

Legat de produsul de compoziţie a două grafuri şi de graful reciproc asociat unui graf dat, prezentăm două rezultate cu aplicaţii ulterioare importante.

Teorema 2.2.7

Produsul de compoziţie a grafurilor este asociativ.

Demonstraţie

Fie $G_1=(X,\Gamma_1)$, $G_2=(X,\Gamma_2)$, $G_3=(X,\Gamma_3)$ şi să notăm $\Gamma'=\Gamma_3(\Gamma_2\Gamma_1)$ şi $\Gamma''=(\Gamma_3\Gamma_2)\Gamma_1$. Pentru $x\in X$ arbitrar, avem:

$$\Gamma'(x)=(\Gamma_3(\Gamma_2\Gamma_1))(x)=\bigcup_{y\in(\Gamma_2\Gamma_1)(x)}\Gamma_3(y)=$$

$$=\bigcup_{\substack{y\in\Gamma_2(z)\\ z\in\Gamma_1(x)}}\Gamma_3(y)=\bigcup_{z\in\Gamma_1(x)}\left(\bigcup_{y\in\Gamma_2(z)}\Gamma_3(y)\right)=\bigcup_{z\in\Gamma_1(x)}(\Gamma_3\Gamma_2)(z)=$$

$$=(\Gamma_3\Gamma_2)(\Gamma_1(x))=((\Gamma_3\Gamma_2)\Gamma_1)(x)=\Gamma''(x)$$

Interpretarea egalităţilor este următoarea: (x,y) este arc în G_2G_1 dacă există $z\in X$ astfel încât (x,z) este arc în G_1, iar (z,y) este arc în G_2.

Dacă vom considera $G_1=G_2=G$, atunci ţinând seama de rezultatul exprimat şi demonstrat în teorema 2.2.7 rezultă că pentru $(\forall)\ k\in\mathbb{N}^*$ se poate construi graful $\left(G^k=\left(X,\Gamma^k\right)\right)$, unde $G=(X,\Gamma)$. Pentru aceasta vom lua:

$$\Gamma^0(x)=x,\ (\forall)\ x\in X\ \text{ şi } \Gamma^k=\Gamma\Gamma^{k-1}. \tag{2.2.11}$$

Teorema 2.2.8

Fie grafurile $G_1=(X,\Gamma_1)$, $G_2=(X,\Gamma_2)$ şi $G=(X,\Gamma)$ produsul lor de compoziţie unde $G=G_2G_1$ şi $\Gamma=\Gamma_2\Gamma_1$, (ca în definiţia 2.2.5). Atunci avem:

$$(G_2G_1)^{-1}=G_1^{-1}G_2^{-1}. \qquad \textbf{(2.2.12)}$$

Demonstraţie

Vom arăta că $(\Gamma_2\Gamma_1)^{-1}(z)=(\Gamma_1^{-1}\Gamma_2^{-1})(z)$, punând în evidenţă dubla incluziune.

Fie $z\in X$ arbitrar şi $x_0\in(\Gamma_2\Gamma_1)^{-1}(z)$. Conform definiţiei grafului reciproc (definiţia 2.2.6), aceasta este echivalent cu:

$$z\in(\Gamma_2\Gamma_1)(x_0)=\bigcup_{y\in\Gamma_1(x_0)}\Gamma_2(y).$$

Rezultă că $(\exists)$ $y_0\in\Gamma_1(x_0)$ astfel încât $z\in\Gamma_2(y_0)$, ceea ce este echivalent cu faptul că $(\exists)$ $y_0\in X$ astfel încât $x_0\in\Gamma_1^{-1}(y_0)$, $y_0\in\Gamma_2^{-1}(z)$.

Aceasta înseamnă că

$$x_0\in\bigcup_{y\in\Gamma_2^{-1}(z)}\Gamma_1^{-1}(y)=\Gamma_1^{-1}\left(\Gamma_2^{-1}(z)\right)=\left(\Gamma_1^{-1}\Gamma_2^{-1}\right)(z)$$

Rezultă că $(\Gamma_2\Gamma_1)^{-1}(z)\subset\left(\Gamma_1^{-1}\Gamma_2^{-1}\right)(z)$.

Similar se arată şi incluziunea inversă, teorema fiind complet demonstrată.

Pentru graful reciproc de ordinul *k* vom lua:

$$\Gamma^{-k}=\Gamma^{-1}\Gamma^{-(k-1)},\ (\forall)\ k\in\mathbb{N}^* \qquad \textbf{(2.1.13)}$$

Putem trece acum la demonstrarea teoremei privind matricea booleană a produsului de compoziţie a două grafuri.

Teorema 2.2.9

Fie $A=(a_{ij})$ şi $B=(b_{ij})$, $i,j=1,2,...,n$, matricele booleene ataşate grafurilor $G_1=(X,U_1)$ şi $G_2=(X,U_2)$, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Atunci matricea booleană $C=A\dot{\otimes}B$ este matricea booleană ataşată grafului $G=G_2G_1$.

Demonstraţie

Fie *U* mulţimea arcelor grafului G_2G_1 şi $C=(c_{ij})$, $i,j=1,2,...,n$, matricea booleană ataşată acestui graf. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $c_{ij}=1$;

2) $(x_i,x_j)\in U$;

3) $(\exists)$ ℓ astfel încât $(x_i,x_\ell)\in U_1$ şi $(x_\ell,x_j)\in U_2$;

4) $(\exists)$ ℓ astfel încât $a_{i\ell}=1$ şi $b_{\ell j}=1$;

5) $(\exists)$ ℓ astfel încât $a_{i\ell}b_{\ell j} = 1$;

6) $\dot{\sum_{k}} a_{i\ell}b_{\ell j} = 1$.

Echivalenţa afirmaţiilor rezultă utilizând definiţiile matricei booleene asociate unui graf şi a operaţiilor de înmulţire şi adunare booleană.

Rezultă, deci, că putem scrie:

$$c_{ij} = \dot{\sum_{k}} a_{ik}b_{kj}\ ,\ (\forall)\ i, j = 1,2,...,n, \qquad (2.2.14)$$

adică

$$C = A \dot{\otimes} B. \qquad (2.2.15)$$

Definiţia 2.2.10

Dacă *A* este matricea booleană ataşată grafului $G = (X, \Gamma)$, atunci matricea obţinută prin înmulţirea booleană a lui *A* cu ea însăşi de *k* ori se notează cu $A^{\dot{k}}$ şi se numeşte **puterea *k*-booleană** a matricei *A*.

$$A^{\dot{k}} = \underbrace{A \dot{\otimes} A \dot{\otimes} ... \dot{\otimes} A}_{k \text{ factori}}. \qquad (2.2.16)$$

Evident, $A^{\dot{k}}$ este tot o matrice booleană, care se va dovedi utilă în studiul grafului succesiunilor de ordinul *k* ale grafului *G*, deci în studiul lui $G^k = \left(X, \Gamma^k\right)$.

Într-adevăr, conform teoremei 2.2.9, dacă *A* este matricea booleană ataşată garfului *G*, atunci $A^{\dot{k}}$ este matricea booleană ataşată grafului $G^k = \left(X, \Gamma^k\right)$. Cunoaştem, de asemenea, că dacă $x \in X$, atunci $\Gamma^k(x)$ este mulţimea succesorilor de ordinul *k* ai lui *x*. Rezultă, deci, că dacă $a_{ij}^{\dot{k}} = 1$ în matricea $A^{\dot{k}}$, atunci $x_j \in X$ este succesor de ordinul *k* al lui $x_i \in X$ şi reciproc, ceea ce, formalizat, se scrie astfel:

$$a_{ij}^{\dot{k}} = 1 \Leftrightarrow x_j \in \Gamma^k(x_i) \qquad (2.2.17)$$

În acelaşi timp afirmaţia este echivalentă cu: $a_{ij}^{\dot{k}} = 1 \Leftrightarrow$ există în *G* drumuri de lungime *k* (formate din *k* arce) de la vârful x_i la vârful x_j.

Rezultatul formulat şi demonstrat în teorema următoare permite stabilirea unei legături între produsul boolean şi produsul obişnuit a două matrice booleene.

Teorema 2.2.11

Fie *A* şi *B* două matrice booleene de aceeaşi dimensiune şi $A \dot{\otimes} B$, respectiv *AB* produsul boolean şi produsul obişnuit al celor două matrice. Atunci matricea $A \dot{\otimes} B$ se obţine din *AB* prin înlocuirea în *AB* a tuturor elementelor nenule cu 1.

Demonstraţie

Teorema este demonstrată dacă arătăm că matricele produs boolean $A \dot{\otimes} B$ şi produs obişnuit *AB* au aceleaşi elemente nule, fapt care rezultă din echivalenţa afirmaţiilor:

1. $\dot{\sum_k} a_{ik} b_{kj} = 0 \ \left(\Leftrightarrow \max_k \left(a_{ik} b_{kj} \right) = 0 \right);$

2. $\sum_k a_{ik} b_{kj} = 0 \ \left(\Leftrightarrow a_{ik} = 0 \text{ sau } b_{kj} = 0, \ (\forall)\, k = 1, 2, \ldots, n \right).$

Însă, oricare din cele două sume este nulă dacă şi numai dacă toţi termenii săi sunt nuli şi cu aceasta demonstraţia se încheie. Pe baza acestei teoreme obţinem informaţii despre **numărul** de drumuri de lungime *k* între două vârfuri x_i şi x_j (şi nu doar existenţa unor astfel de drumuri), precum şi despre **numărul** şi **lungimea circuitelor** distincte care conţin un vârf oarecare x_i.

Din teorema 2.2.11 mai deducem că dacă $A^k = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{k \text{ factori}}$ este puterea *k* a matricei *A* (obţinută prin înmulţirea obişnuită), atunci

$$a_{ij}^{(k)} > 0 \Leftrightarrow a_{ij}^{\dot{k}} = 1, \tag{2.2.18}$$

unde $a_{ij}^{(k)}$ este elementul matricei A^k aflat la intersecţia liniei *i* cu coloana *j*. Este firesc să ne aşteptăm ca matricea A^k să ne ofere mai multe informaţii despre graful său asociat decât matricea $A^{\dot{k}}$. Într-adevăr numărul $a_{ij}^{\dot{k}}$ ne *arată numai dacă există sau nu drumuri de lungime k între vârfurile* x_i *şi* x_j, în timp ce numărul $a_{ij}^{(k)}$ din A^k ne *arată numărul drumurilor de lungime k care există între* x_i *şi* x_j. Afirmaţia referitoare la $a_{ij}^{\dot{k}}$ a fost justificată anterior. Afirmaţia referitoare la $a_{ij}^{(k)}$ o vom face în cele ce urmează, din aproape în aproape. Astfel, dacă $a_{ij}^{(2)} = m > 0$, deci $\sum_{k=1} a_{ik} b_{kj} = m$, rezultă că există exact *m* indici distincţi, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ şi *m* perechi de elemente din linia *i*, respectiv coloana *j* a lui *A*, egale cu 1: $\left(a_{ik_1} = a_{k_1 j} \right) = \left(a_{ik_2} = a_{k_2 j} \right) = \ldots = \left(a_{ik_m} = a_{k_m j} \right) = 1$, deci există exact *m* drumuri formate din două arce de la vârful x_i la vârful x_j şi acestea sunt următoarele: $\left(x_i, x_{k_1}, x_j \right)$; $\left(x_i, x_{k_2}, x_j \right), \ldots, \left(x_i, x_{k_m}, x_j \right)$. Dacă $a_{ij}^{(2)} = 0$ este evident că nu există astfel de drumuri.

Pentru a vedea câte drumuri formate din trei arce există de la x_i la x_j vom preciza mai întâi câte asemenea drumuri există astfel încât penultimul vârf al drumului să fie un anumit vârf x_k. Un astfel de drum este de forma $\left(x_i, \ldots, x_k, x_j \right)$ şi este alcătuit din drumul format din două arce $\left(x_i, \ldots, x_k \right)$, prelungit cu arcul $\left(x_k, x_j \right)$. Dacă arcul $\left(x_k, x_j \right)$ nu există $\left(a_{kj} = 0 \right)$, atunci nu există nici un astfel de drum deoarece $a_{ik}^{(2)} \cdot a_{kj} = 0$, iar dacă arcul $\left(x_k, x_j\right)$ există $\left(a_{kj} = 1\right)$, atunci $a_{ik}^{(2)} \cdot a_{k_j} = a_{ik}^{(2)}$ şi deci există astfel de drumuri. Deoarece x_k poate fi oricare vârf al grafului, rezultă că există $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot a_{kj} = a_{ij}^{(3)}$ drumuri formate din trei arce, deci de lungime 3, de la x_i la x_j.

Teorema care urmează permite studiul existenţei circuitelor în graful *G*.

Teorema 2.2.12

Fie *A* matricea booleană ataşată grafului $G = \left(X, \Gamma\right)$. Atunci *G* este fără circuite dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^{\dot{k}} = O_{n,n}$ $\left(\Leftrightarrow A^{k} = O_{n,n}\right)$.

Demonstraţie

„$\Rightarrow$” Fie $G = \left(X, \Gamma\right)$ un graf cu *n* vârfuri şi fără circuite şi *A* matricea booleană asociată grafului *G*. Cum $\operatorname{card} X = n$, rezultă că în *G* nu există drumuri de lungime mai mare decât $n-1$, deci $A^{\dot{n}} = O_{n,n}$, unde *n* este numărul vârfurilor grafului.

„$\Leftarrow$” Presupunem că $(\exists)$ $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^{\dot{k}} = O_{n,n}$. Presupunem prin absurd că graful conţine (cel puţin) un circuit. Rezultă că în graf există drumuri de orice lungime, circuitul care există putând fi parcurs de un număr arbitrar de ori, deci $A^{\dot{k}} \neq O_{n,n}$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}^*$, contradicţie cu ipoteza. Rezultă că presupunerea făcută este falsă deci graful *G* nu conţine nici un circuit.

Din demonstraţia teoremei rezultă că dacă graful *G* nu conţine circuite atunci $A^{\dot{n}} = O_{n,n}$. Însă cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A^{\dot{k}} = O_{n,n}$ poate fi mai mic decât *n*. Dacă $A^{\dot{n-1}} = O_{n,n}$, atunci există în *G* un drum format din $n-1$ arce, deci un drum care trece prin toate vârfurile grafului, adică un drum hamiltonian.

Dacă în graf există un drum de lungime *maximă* $m < n$, atunci $A^{\dot{m+1}} = O_{n,n}$.

Într-un graf finit $G = \left(X, \Gamma\right)$ cu circuite, elementele de pe diagonala principală a matricei A^{k} oferă informaţii asupra circuitelor. Astfel, valoarea lui $a_{ii}^{(k)}$ este egală cu numărul circuitelor distincte formate din *k* arce care conţin vârful x_i.

Exemplul 2.2.13

Fie graful $G = \left(X, \Gamma\right)$ dat în reprezentare sagitală în figura următoare:

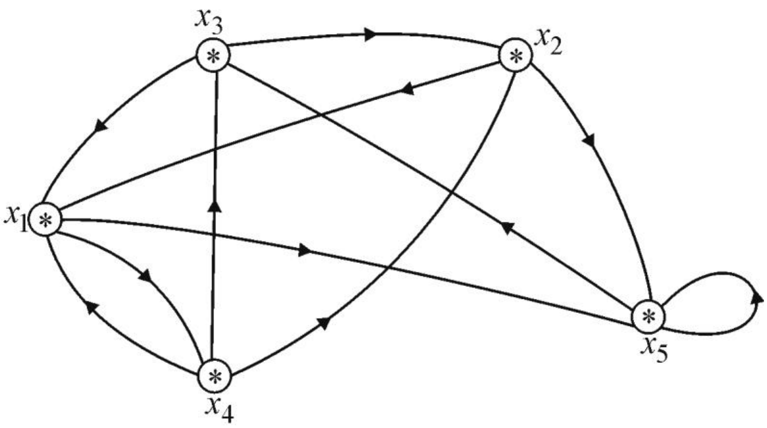


Fig. 2.2.1

Matricea booleană asociată acestui graf este:

$$A=\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_3\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_5 \end{array}$$

Matricele (produs obişnuit) A^2, A^3 şi A^4 sunt:

$$A^2=\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & x_1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & x_2\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & x_3\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & x_4\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & x_5 \end{array}; \qquad A^3=\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & x_1\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 & x_2\\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & x_3\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & x_4\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & x_5 \end{array};$$

$$A^4=\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 8 & x_1\\ 5 & 3 & 2 & 2 & 6 & x_2\\ 5 & 4 & 4 & 1 & 5 & x_3\\ 6 & 5 & 7 & 2 & 8 & x_4\\ 3 & 2 & 4 & 2 & 9 & x_5 \end{array}.$$

Dacă în A^2, A^3 şi A^4 vom înlocui elementele nenule cu 1 vom obţine, respectiv matricele $A^{\dot{2}}$, $A^{\dot{3}}$ şi $A^{\dot{4}}$.

Analizând aceste matrice obţinem informaţii referitoare la numărul de drumuri de lungime k $(k=2,3,4)$ între două vârfuri x_i şi x_j ale grafului, precum şi despre numărul şi lungimea circuitelor distincte care conţin un vârf oarecare x_i. Astfel:

$a_{13}^{(2)} = 2 \Leftrightarrow$ există 2 drumuri distincte de lungime 2 de la x_1 la x_3;

$a_{34}^{(3)} = 1 \Leftrightarrow$ există un singur drum de lungime 3 de la x_3 la x_4;

$a_{24}^{(3)} = 0 \Leftrightarrow$ nu există nici un drum de lungime 3 de la x_2 la x_4;

$a_{ij}^{(3)} \neq 0$, $(\forall) i \neq 2$ şi $j \neq 4 \Leftrightarrow$ există drumuri de lungime 3 de la orice vârf x_i până la orice vârf x_j, cu excepţia vârfurilor x_2 şi x_3;

$a_{ij}^{(4)} \neq 0$, $(\forall) i, j = 1,2,...,5 \Leftrightarrow$ există drumuri de lungime 4 de la oricare vârf x_i la oricare vârf x_j, (în particular rezultă că graful este tare conex);

$a_{11}^{(3)} = 3 \Leftrightarrow$ există trei drumuri distincte, formate din câte 3 arce fiecare de la x_1 la x_1, deci 3 circuite care conţin vârful x_1. Acestea sunt: (x_1, x_4, x_2, x_1); (x_1, x_4, x_3, x_1); (x_1, x_5, x_3, x_1);

$a_{11}^{(4)} = 1 \Leftrightarrow$ există 4 drumuri de lungime 4 de la x_1 la x_1, acestea fiind:
$(x_1, x_4, x_1, x_4, x_1)$; $(x_1, x_4, x_3, x_2, x_1)$; $(x_1, x_5, x_5, x_3, x_1)$; $(x_1, x_5, x_3, x_2, x_1)$.

2.4 Matricea booleană a închiderii tranzitive

Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf finit, cu $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi *A* matricea booleană asociată lui *G*. Reamintim că pentru $(\forall) x \in X$, $\Gamma^0(x) \overset{\text{def}}{=} \{x\}$ şi

$$\hat{\Gamma}(x) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma^k(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \Gamma^2(x) \cup ... \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

este mulţimea formată din vârful *x* şi toţi succesorii săi din graful *G* şi că graful $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ se numeşte închiderea tranzitivă a grafului *G*. Ne propunem să găsim matricea booleană asociată grafului $\hat{G}$.

Fie *I* matricea unitate de ordinul *n* şi notăm

$$\hat{A} = I \dot{\oplus} A. \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

Matricea $\hat{A}$ este matricea booleană care corespunde grafului $(X, \Gamma^0 \vee \Gamma)$, se obţine înlocuind în *A* toate elementele nule de pe diagonala principală cu 1 şi corespunde grafului obţinut din *G* prin adăugarea buclelor la toate vârfurile la care acestea nu există. În graful (X, Γ_1), unde $\Gamma_1 = \Gamma^0 \vee \Gamma$, mulţimea $\Gamma_1(x)$ este mulţimea formată din vârful *x* şi toţi succesorii săi de ordinul 1. Pătratul boolean al matricei $\hat{A}$ este:

$$\hat{A}^{\dot{2}} = (I \dot{\oplus} A) \dot{\oplus} (\dot{I} \oplus A) = \dot{I} \oplus A \dot{\oplus} A \dot{\oplus} A^{\dot{2}} = \dot{I} \oplus A \dot{\oplus} A^{\dot{2}}. \qquad \textbf{(2.4.3)}$$

Matricele I, A şi $A^{\dot{2}}$ corespund grafurilor $\left(X,\Gamma^0\right)$, $\left(X,\Gamma\right)$, $\left(X,\Gamma^2\right)$, deci $\hat{A}^{\dot{2}}$ corespunde grafului $\left(X,\Gamma_2\right)$, unde $\Gamma_2=\Gamma^0\vee\Gamma\vee\Gamma^2$ şi $\Gamma_2(x)=\left(\Gamma^0\vee\Gamma\vee\Gamma^2\right)(x)=\{x\}\cup\Gamma(x)\cup\Gamma^2(x)$, $\quad(\forall)\,x\in X$. Deci, în graful $G_2=\left(X,\Gamma_2\right)$, corespunzător matricei $\hat{A}^{\dot{2}}$, fiecărui element $x\in X$ îi corespunde o mulţime formată din el însuşi şi din toţi succesorii săi de ordinul 1 şi de ordinul 2.

Tot astfel, pas cu pas, se deduce că matricea:

$$\hat{A}^{\dot{r}}=\dot{I}\dot{\oplus}\dot{A}\oplus A^{\dot{2}}\dot{\oplus}\ldots\dot{\oplus}A^{\dot{r}}, \qquad \textbf{(2.4.4)}$$

corespunde grafului $G_r=\left(X,\Gamma_r\right)$, unde $\Gamma_r=\Gamma^0\vee\Gamma\vee\Gamma^2\vee\ldots\vee\Gamma^r$ şi în care fiecărui element $x\in X$ îi corespunde o mulţime formată din el însuşi şi din toţi succesorii săi până la ordinul r inclusiv.

Să mai observăm că toate elementele egale cu 1 din $\hat{A}^{\dot{r}}$ rămân egale cu 1 şi în $\hat{A}^{\dot{r+1}}$, deoarece

$$\hat{A}^{\dot{r+1}}=\hat{A}^{\dot{r}}\dot{\oplus}A^{\dot{r+1}}. \qquad \textbf{(2.4.5)}$$

Astfel, se deduce că ridicând matricea $\hat{A}$ la puteri booleene succesive, la un moment dat vom avea $\hat{A}^{\dot{k+1}}=\hat{A}^{\dot{k}}$. La acest pas al procesului s-a obţinut matricea închiderii tranzitive a grafului G, aceasta fiind $\hat{A}^{\dot{k}}$.

Exemplul 2.4.1

Fie graful $G=\left(X,U\right)$, dat în reprezentarea sagitală în figura 2.4.1.

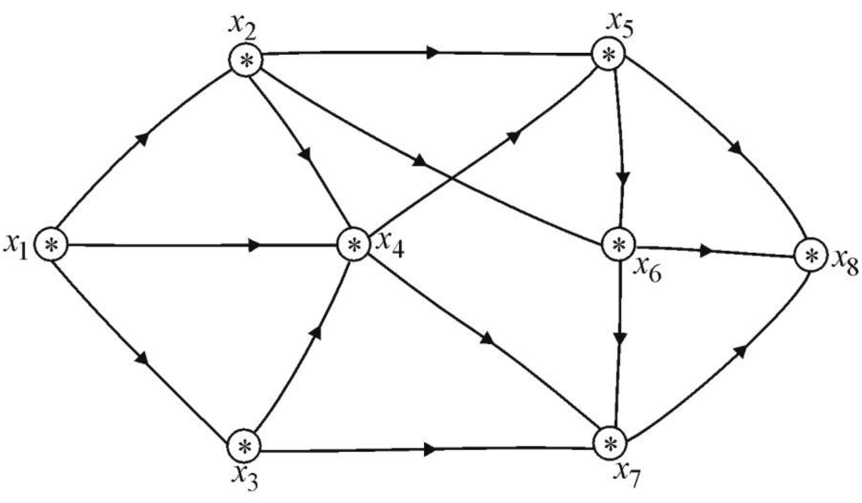


Fig. 2.4.1

Matricea booleană asociată acestui graf este:

$$
A = \begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8
\end{array}
$$

Matricea $\hat{A}$ se obţine din A punând 1 în loc de 0 peste tot, pe diagonala principală din A:

$$
\hat{A} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Puterile booleene succesive ale lui $\hat{A}$ sunt următoarele:

$$
\hat{A}^{\dot{2}} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}; \quad
\hat{A}^{\dot{3}} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix};
$$

$$\hat{A}^{\dot{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se constată că $\hat{A}^{\dot{3}} = \hat{A}^{\dot{4}}$, deci matricea $\hat{A}^{\dot{3}}$ este matrice booleană a închiderii tranzitive a grafului *G* din figura 2.4.1.

2.5 Împărţirea în nivele a unui graf fără circuite cu ajutorul matricei booleene

Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf finit şi fără circuite, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi *A* matricea sa booleană asociată. Am văzut că într-un astfel de graf există cel puţin un vârf fără predecesori şi cel puţin un vârf fără succesori (teorema 1.4.2). De asemenea, se cunoaşte că dacă un vârf x_i nu are predecesori atunci toate elementele din coloana *i* a matricei *A* sunt egale cu zero $\left(g^-(x_i) = 0\right)$, iar dacă un vârf x_j nu are succesori, atunci toate elementele din linia *j* a matricei *A* sunt nule $\left(g^+(x_j) = 0\right)$ (definiţia 2.1.3).

Împărţirea în nivele a grafului *G* se realizează mai uşor utilizând matricea booleană asociată acestuia.

Primul nivel va fi format din mulţimea vârfurilor fără predecesori, deci din toate vârfurile care corespund la coloanele ce au toate elementele nule din matricea *A*.

Se suprimă din matricea *A* toate liniile şi coloanele care corespund vârfurilor primului nivel; matricea rămasă este matricea booleană asociată subgrafului obţinut prin suprimarea vârfurilor primului nivel şi a tuturor arcelor care au una din extremităţi în aceste vârfuri.

Mai departe, se determină în submatricea lui *A* obţinută anterior, vârfurile care corespund coloanelor cu toate elementele nule; mulţimea acestor vârfuri va forma nivelul al doilea al grafului *G*.

După suprimarea tuturor liniilor şi coloanelor care corespund vârfurilor din nivelul al doilea se obţine submatricea lui *A* care permite determinarea mulţimii vârfurilor de pe nivelul al treilea. Algoritmul se continuă până când se ajunge la ultimul nivel, format din mulţimea tuturor vârfurilor din *G* care nu au succesori.

Algoritmul poate fi organizat şi în sens invers, determinând mai întâi ultimul nivel şi apoi succesiv, nivelele anterioare. Mulţimea vârfurilor aflate pe ultimul nivel este formată din acele vârfuri ale grafului *G* corespunzătoare liniilor din matricea *A* care au toate elementele egale cu zero. Se suprimă apoi din *A* toate liniile şi coloanele care corespund vârfurilor de pe ultimul nivel, rezultând matricea booleană ataşată subgrafului obţinut din *G* prin suprimarea vârfurilor de pe ultimul nivel şi a tuturor arcelor grafului *G* care au o extremitate în aceste vârfuri. Mulţimea vârfurilor aflate pe penultimul nivel este formată din vârfurile corespunzătoare liniilor care au toate elementele egale cu zero în submatricea lui *A* obţinută la sfârşitul etapei anterioare. După suprimarea tuturor liniilor şi coloanelor care corespund vârfurilor din penultimul nivel se obţine submatricea lui *A* care permite determinarea mulţimii vârfurilor de pe antepenultimul nivel.

Algoritmul se continuă până când se ajunge la primul nivel, format din mulţimea tuturor vârfurilor din graful *G* care nu au predecesori.

Cele două procedee nu conduc întotdeauna la aceeaşi împărţire pe nivele a grafului *G*, deci se pot obţine partiţii diferite ale mulţimii *X*. Împărţirea în nivele a unui graf fără circuite este utilă în rezolvarea problemelor de determinare a drumurilor optime, acestea putându-se obţine mai uşor dacă graful este partiţionat pe nivele.

Exemplul 2.5.1

Reluăm graful din figura 1.5.1, pe care ne propunem să-l împărţim în nivele, cu ajutorul matricei booleene asociate.

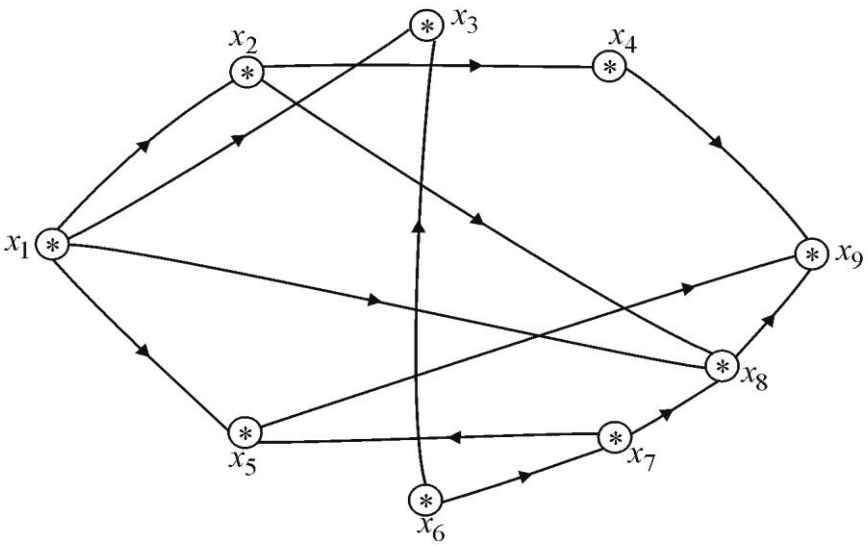


Fig. 2.5.1

Matricea booleană asociată acestui graf este următoarea:

$$A = \begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_9 \end{array}$$

În *A* există două coloane care au toate elementele egale cu zero şi anume coloanele care corespund vârfurilor x_1 şi x_6; mulţimea vârfurilor aflate pe nivelul 1 este, deci, $\{x_1, x_6\}$.

Suprimăm liniile şi coloanele corespunzătoare vârfurilor x_1 şi x_6. Se obţine submatricea A_I:

$$A_I = \begin{array}{ccccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_9 \end{array}$$

În submatricea A_I au apărut trei coloane cu toate elementele egale cu zero, respectiv coloanele care corespund vârfurilor x_2, x_3 şi x_7; mulţimea vârfurilor care formează nivelul II al grafului *G* este, deci: $\{x_2, x_3, x_7\}$. Suprimăm din submatricea A_I, toate liniile şi coloanele care corespund acestor vârfuri şi obţinem submatricea A_{II}:

$$A_{II} = \begin{array}{cccc|c} x_4 & x_5 & x_8 & x_9 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_9 \end{array}$$

În submatricea A_{II} au apărut trei coloane cu toate elementele egale cu zero, respectiv coloanele care corespund vârfurilor x_4, x_5 şi x_8; nivelul III este format din mulţimea acestor vârfuri: $\{x_4, x_5, x_8\}$.

Suprimând din A_{III} toate liniile şi coloanele corespunzătoare acestor vârfuri obţinem:

$$A_{III} = \begin{array}{c} x_9 \\ \|0\| \end{array} x_9$$

Vârful x_9 nu are nici un succesor şi va forma nivelul IV al grafului *G*.

În final s-a obţinut următoarea împărţire pe nivele:

– nivelul I: $\{x_1, x_6\}$;

– nivelul II: $\{x_2, x_3, x_7\}$;

– nivelul III: $\{x_4, x_5, x_8\}$;

– nivelul IV: $\{x_9\}$.

Reprezentarea sagitală este, evident, cea din figura 1.5.4, care respectă condiţia suplimentară ca toţi succesorii unui vârf să fie aşezaţi pe nivelul imediat următor. De altfel, această condiţie este realizată implicit în cazul organizării algoritmului în sensul de la nivelul I (care conţine toate vârfurile fără predecesori) către ultimul nivel (care conţine vârfurile fără succesori).

Lăsăm cititorului ca exerciţiu organizarea algoritmului în sens invers, de la ultimul nivel către nivelul I şi compararea rezultatului obţinut în final cu cel anterior. De asemenea, se propune rezolvarea aceleiaşi probleme şi pentru graful din figura 2.4.1.

TEST DE AUTOEVALUARE

Problema nr. 1

Fie graful $G=\left(X,U\right)$ a cărui matrice booleană asociată este:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului G;
2) Să se determine matricea drumurilor asociată grafului G cu algoritmul lui Chen;
3) Să se cerceteze existenţa circuitelor în graful G;
4) Să se determine, cu ajutorul matricei drumurilor faptul că în graful G există un drum hamiltonian şi să se precizeze vârfurile sale.

Problema nr. 2

Prelucrarea unui produs poate trece prin 6 faze distincte notate într-un model de graf prin x_i, $i=1,2,...,6$, iar posibilităţile de trecere de la o fază de prelucrare la alta se reprezintă prin arce orientate. Matricea booleană asociată acestui graf este următoarea:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului care modelează procesul tehnologic de prelucrare;
2) Să se determine, pornind de la definiţie sau cu algoritmul lui Chen, matricea drumurilor a grafului;
3) Este posibil ca produsul să treacă prin toate fazele de prelucrare? Dacă răspunsul este afirmativ să se indice tehnologia corespunzătoare.

Problema nr. 3

Într-o hală a unei întreprinderi industriale procesul de producţie se desfăşoară la 6 puncte de lucru legate printr-un sistem de benzi rulante. Fiecare punct de lucru execută câte o anumită operaţie. Întreprinderea asimilează la un moment dat un produs nou care trebuie să treacă prin toate cele 6 operaţii, deci pe la toate punctele de lucru. Matricea booleană asociată grafului sistemului de transport cu benzi rulante dintre cele 6 puncte de lucru este:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului care modelează sistemul de transport cu benzi rulante dintre cele 6 puncte de lucru;
2) Să se determine matricea drumurilor asociată grafului G;
3) Să se cerceteze dacă sistemul de benzi rulante existent în hală permite ca produsul să treacă pe la toate punctele de lucru. Dacă acest lucru nu este posibil să se stabilească o modificare tehnică cât mai simplă care să permită soluţionarea problemei de producţie.

Problema nr. 4

Se dă graful $G=(X,A)$ prin mulţimea vârfurilor sale, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ şi prin matricea booleană asociată : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Să se construiască reprezentarea sagitală a grafului G şi să se calculeze gradul de emisie şi de recepţie al fiecărui vârf ;
2) Să se prezinte algoritmul lui Chen pentru determinarea matricei conexe terminale T asociate unui graf G şi să se utilizeze acest algoritm în cazul grafului dat. Precizaţi cu ajutorul matricei T determinate la punctul b) dacă graful G are circuite.
3) Să se calculeze puterea de atingere a fiecărui vârf al grafului G. Să se stabilească dacă în G există un drum hamiltonian şi în caz afirmativ să se precizeze succesiunea vârfurilor sale.

TEMĂ DE CONTROL

Problema nr. 1

O companie de transport mărfuri trebuie să efectueze transportul unor produse între şapte puncte economice notate cu $x_1, x_2, ..., x_7$, acestea fiind întreprinderi, depozite, magazine de desfacere, etc. Reţeaua de transport este un graf cu 7 vârfuri, $x_1, x_2, ..., x_7$ şi având următoarea matrice, notată cu *A*, a conexiunilor:

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_7 \end{array};$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului reţelei de transport corespunzătoare matricei *A*;

2) Să se stabilească dacă în graful reţelei de transport corespunzătoare matricei *A* există circuite;

3) Să se determine drumul de lungime maximă din graful obţinut;

4) Să se împartă graful de la punctul 1) în nivele, plecând de la reprezentarea sagitală şi de la matricea de adiacenţă.

5) Să se rezolve aceeaşi problemă (punctele 1, 2, 3, 4) în ipoteza că nu mai poate fi utilizată legătura de la punctul x_1 la punctul x_6;

6) Să se determine gradul de emisie, gradul de recepţie şi puterea de atingere a fiecărui vârf al grafului.

Problema nr. 2

În departamentul de cercetare al unei fabrici din industria aeronautică s-au făcut studii şi cercetări privind influenţa anumitor tratamente suplimentare în prelucrarea unor piese asupra măririi sau micşorării timpului mediu de funcţionare al pieselor respective.

Rezultatele cercetărilor au arătat că acest timp se măreşte sau se micşorează cu un anumit număr de unităţi de timp, aceasta depinzând numai de ordinea în care se aplică aceste tratamente.

S-a stabilit că modificarea timpului mediu de funcţionare a unei piese esenţiale din ansamblul trenului de aterizare depinde de tratamentul aplicat la un moment dat şi de tratamentul aplicat anterior, existând numai posibilităţile indicate prin arcele unui graf cu 9 vârfuri, reprezentând cele 9 tratamente posibile care pot fi aplicate. Matricea conexiunilor acestui graf este următoarea:

$$A=\begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_9 \end{array}.$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului celor 9 tratamente termice, având matricea conexiunilor *A*;

2) Să se determine matricea drumurilor *T* ataşată grafului şi să se precizeze dacă în graf există circuite;

3) Să se determine drumul de lungime maximă din graful obţinut;

4) Să se împartă graful de la punctul 1) în nivele, plecând de la reprezentarea sagitală şi de la matricea de adiacenţă.

5) Să se determine gradul de emisie, gradul de recepţie şi puterea de atingere a fiecărui vârf al grafului.

Problema nr. 3

Între opt puncte de lucru ale unui sistem economic există o reţea de transport al cărui graf este dat prin matricea *A* a conexiunilor dintre vârfurile $x_1, x_2, \ldots, x_8$ ale sale, unde:

$$A=\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_8 \end{array}.$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului a sistemului de transport dintre cele opt puncte ale sistemului economic aferent matricelor *A* şi *C*;

2) Să se determine matricea drumurilor asociată acestui graf utilizând algoritmul lui Chen;

3) Să se stabilească dacă graful are circuite şi să se determine drumul de lungime maximă din graf;

5) Să se rezolve aceeaşi problemă dacă apare o nouă posibilitate de transport, între vârfurile x_3 şi x_7.

6) Să se determine gradul de emisie, gradul de recepţie şi puterea de atingere a fiecărui vârf al grafului.

Problema nr. 4

Se dă graful $G=(X,A)$ prin mulţimea vârfurilor sale, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ şi prin matricea booleană asociată : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Să se construiască reprezentarea sagitală a grafului G şi să se calculeze gradul de emisie şi de recepţie al fiecărui vârf ;
2) Să se prezinte algoritmul lui Chen pentru determinarea matricei drumurilor T asociate unui graf G şi să se utilizeze acest algoritm în cazul grafului dat. Precizaţi cu ajutorul matricei T determinate la punctul b) dacă graful G are circuite.
3) Să se calculeze puterea de atingere a fiecărui vârf al grafului G. Să se stabilească dacă în G există un drum hamiltonian şi în caz afirmativ să se precizeze succesiunea vârfurilor sale.

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂŢARE NR. 2

1. Claude Berge: ***Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei***, Editura tehnică, Bucureşti, 1969;
2. Tiberiu Ionescu: ***Grafuri. Aplicaţii, Vol I, II***, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, Bucureşti, 1973;
3. Al. Roşu: ***Teoria grafurilor***. ***Algoritmi şi aplicaţii***, Editura militară, Bucureşti, 1974;
4. C. Dinescu, B. Săvulescu: ***Metode de matematică modernă pentru economişti. Culegere de probleme***, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975;
5. O. Popescu, D.P. Vasiliu, ş.a.: ***Matematici aplicate în economie***, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1997;
6. Nicolae Micu: ***Teoria grafurilo***r, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1981;
7. C. Dinescu, I. Fătu: ***Matematici pentru economişti***, vol. II, III, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1995.
8. Dragoş-Radu Popescu: ***Combinatorică şi teoria grafurilor***, Biblioteca Societăţii de Stiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE NR. 3

GRAFURI CU ARCE VALORIZATE. ALGORITMI DE OPTIMIZARE

Obiective urmărite:

- Însuşirea unor noțiuni fundamentale din domeniul teoriei grafurilor.
- Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură informatică, tehnică sau economică, cu utilizarea cunoştințelor însuşite.
- Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
- Formarea şi dezvoltarea aptitudinilor şi deprinderilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată, în rezolvarea problemelor tehnico-economice şi de specialitate;

Rezumat:

În această unitate de învățare sunt prezentate, pe parcursul a patru lecții, următoarele:

- noțiunea de graf cu arce valorizate;
- algoritmi pentru determinarea drumului de lungime minimă între două vârfuri ale unui graf;
- algoritmii lui Ford şi Bellman-Kalaba pentru determinarea drumului de valoare minimă între două vârfuri oarecare ale unui graf;
- algoritmii lui Ford şi Bellman-Kalaba pentru determinarea drumului de valoare maximă între două vârfuri oarecare ale unui graf fără circuite;
- algoritmul matriceal pentru determinarea drumului de valoare minimă sau maximă între două vârfuri oarecare ale unui graf; variante ale algoritmilor prezentați.
- Fiecare algoritm este prezentat cu justificarea teoretică de rigoare şi totodată este însoțit de cel puțin un exemplu rezolvat complet, care reprezintă totodată şi un model pentru rezolvarea testelor de autoevaluare şi a temei de control.

Cuvinte cheie:

Graf cu arce valorizate, drum de lungime minimă, drum de valoare minimă, drum de valoare maximă, algoritmul lui Ford, principiul optimalității, algoritmul lui Bellman-Kalaba, algoritmul matriceal.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar pentru însuşirea noțiunilor teoretice şi algoritmilor prezentați în unitatea de învățare nr. 3, precum şi cel necesar formării deprinderilor de calcul şi utilizării algoritmilor pentru rezolvarea claselor de probleme specifice acestei părți a cursului este estimat la aproximativ 3-4 ore pentru lecția 1, cu tendința micşorării acestuia ajungând în final la 2-3 ore, de la lecția 1 către lecția 4, pe măsura înțelegerii şi însuşirii cunoştințelor transmise şi a formării deprinderilor de calcul.

LECȚIA 6 - GRAFURI CU ARCE VALORIZATE. DRUM DE LUNGIME MINIMĂ

3.1 Noțiuni introductive. Punerea problemei

Unele procese şi fenomene practice pot fi modelate prin grafuri ale căror arce trebuie valorizate. Aceasta înseamnă că fiecărui arc i se ataşează o valoare numerică a cărei semnificație concretă diferă în raport cu natura problemei modelate; de exemplu, aceasta poate fi de tip cost, distanță, consum, durată, productivitate, probabilitate etc.

Exemple

a) Dacă se pune problema efectuării unor transporturi între diferite localități, legate printr-o rețea de drumuri, se poate modela această problemă printr-un graf ale cărui vârfuri sunt localități. Un drum între localitățile x şi y se va reprezenta prin arcul (x, y). Dacă pe acest drum circulația se face în ambele sensuri, în graf va exista şi arcul (y, x). Dacă se studiază problema din punct de vedere al timpului necesar efectuării transporturilor, atunci fiecărui arc i se va ataşa un număr pozitiv reprezentând durata transportului pe drumul căruia i s-a asociat acel arc. Putem întâlni situații diverse după cum se prezintă în exemplele următoare:

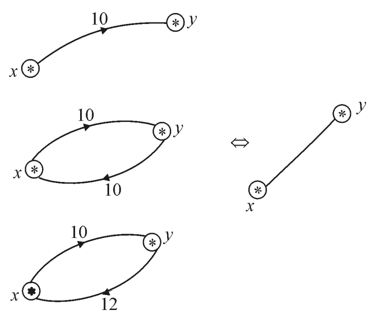


Fig. 3.1.1

$\Leftrightarrow$ Durata transportului de la x la y este de 10 unități;

$\Leftrightarrow$ $(\exists)$ şi arcul (y, x) şi are aceeaşi valoare cu arcul (x, y);

$\Leftrightarrow$ $(\exists)$ ambele arce (x, y) şi (y, x), dar au valori diferite; obligatoriu figurează ambele arce.

După ce se reprezintă întregul graf se poate rezolva problema următoare: Să se determine traseul pentru efectuarea unui transport între două localități astfel încât timpul necesar să fie minim.

b) Dacă se studiază problema din punct de vedere al costului transportului, valorile arcelor vor avea altă semnificație (costul transportului de la x la y) şi drumurile optime în rezolvarea unei probleme de tipul: „determinarea traseului pentru efectuarea unui transport de cost minim între două localități”, vor fi altele.

c) În alte aplicații se pot întâlni şi alte semnificații ale valorilor arcelor.

Definiția 3.1.1

Fiind dat un graf $G = (X, \Gamma)$, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, fie U mulțimea arcelor sale. Fiecărui arc $u = (x_i, x_j) \in U$ i se ataşează un număr nenegativ, notat cu $\ell(u)$ sau $\ell(x_i, x_j)$, care se va numi valoarea arcului *u*. Definim valoarea drumului $\mu = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ ca fiind suma valorilor arcelor care-l compun, deci

$$\ell(\mu) = \sum_{r=1}^{k-1} \ell\left(x_{i_r}, x_{i_{r+1}}\right) \tag{3.1.1}$$

Vom studia algoritmi pentru determinarea drumurilor optime (drumuri de valoare maximă sau de valoare minimă) între două vârfuri ale grafului.

Deoarece într-un graf cu circuite pot exista drumuri de valoare oricât de mare (obținute prin parcurgerea repetată a unui circuit), drumuri de valoare maximă se caută, de regulă, în grafuri fără circuite. Drumuri de valoare minimă se caută şi în grafuri care au circuite.

Observația 3.1.2

Drumul de valoare minimă între două vârfuri ale unui graf este un drum elementar (nu conține un circuit ca subdrum).

Exemplu

Fie drumul $\mu = \left(x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_\ell, \ldots, x_j\right)$

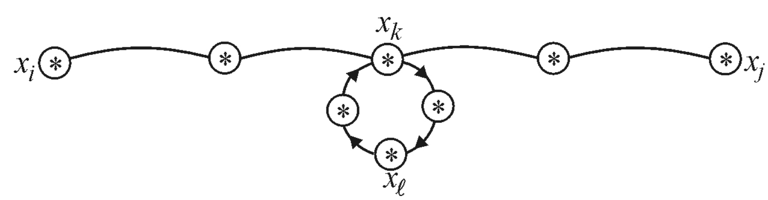


Fig. 3.1.2

Acest drum de la x_i la x_j nu poate fi de valoare minimă, deoarece el conține subdrumul $\mu' = \left(x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_j\right)$, care are valoare mai mică decât drumul μ, în ipoteza reală de altfel, că circuitul $\left(x_k, \ldots, x_\ell, \ldots, x_k\right)$ are cel puțin un arc de valoare nenulă.

Propoziția 3.1.3

Orice subdrum al unui drum optim este, de asemenea, un drum optim.

Demonstrație

Fie drumul dintre nodurile x şi y definit prin: $\mu = \left(x, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_\ell, \ldots, y\right)$ de valoare optimă (maximă sau minimă) într-un graf:

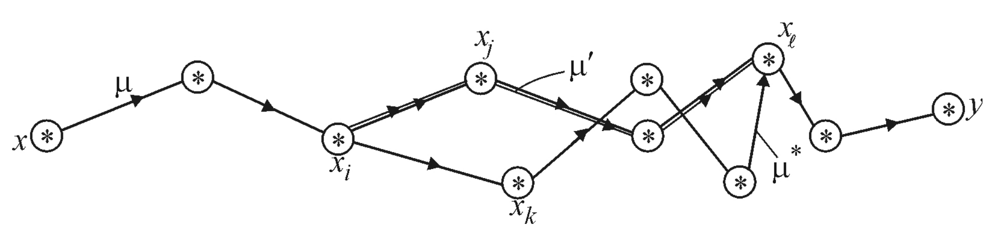


Fig. 3.1.3

Atunci subdrumul $\mu' = (x_i, x_j, ..., x_\ell)$ este drum de valoare optimă (maximă sau minimă) de la x_i la x_ℓ.

Într-adevăr, presupunând că $(\exists)$ alt subdrum, de exemplu, $\mu^* = (x_i, x_k, ..., x_\ell)$ între x_i şi x_ℓ de valoare mai mare (pentru cazul de maxim) sau mai mică (pentru cazul de minim) decât μ', atunci drumul $\mu_1 = (x, ..., x_i, x_k, ..., x_\ell, ..., y)$ ar fi un drum de valoare mai mare (pentru cazul de maxim), respectiv de valoare mai mică (pentru cazul de minim), de la *x* la *y*, decât drumul μ, presupus a fi optim (de valoare maximă sau minimă) între nodurile *x* şi *y*, contradicție cu ipoteza. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi demonstrația este încheiată.

3.2 Algoritm pentru determinarea drumului de lungime minimă dintre două vârfuri ale unui graf

Această problemă este un caz particular al problemei determinării *drumului de valoare minimă* între cele două vârfuri ale unui graf şi ea rezultă dând fiecărui arc valoarea 1, caz în care noțiunile de valoare şi lungime coincid, atât pentru un arc, cât şi pentru un drum.

Fie graful $G = (X, \Gamma)$, cu $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi două vârfuri oarecare $x, y \in X$, $x \neq y$.

Pentru determinarea drumului de lungime minimă de la *x* la *y* vom folosi următorul procedeu de marcare a vârfurilor:

- vârful inițial, *x*, se marchează cu 0;
- dacă x_i a fost marcat cu *r*, arcul $(x_i, x_j) \in U$ şi x_j nu a fost marcat până în acest moment, atunci x_j se marchează cu $r+1$;
- ne oprim în momentul în care *y* a fost marcat. Se pot face următoarele afirmații.

a) Dacă procesul de marcare a vârfurilor se termină fără ca *y* să fie marcat, aceasta înseamnă că nu există nici un drum de la *x* la *y*.

b) Numărul cu care este marcat un vârf reprezintă lungimea celui mai scurt drum prin care se poate ajunge de la *x* la acel vârf.

Dacă *y* a fost marcat, pentru determinarea unui drum de lungime minimă de la *x* la *y* vom proceda astfel:

1º – Dacă *y* a fost marcat cu *m* ($\Leftrightarrow$ lungimea minimă a drumurilor de la *x* la *y* este *m*), atunci căutăm un vârf $x^{(m-1)}$, marcat cu $m-1$, astfel încât arcul $\left(x^{(m-1)}, y\right) \in U$;

2º – după alegerea lui $x^{(m-1)}$, căutăm un vârf $x^{(m-2)}$, marcat cu $m-2$, astfel încât $\left(x^{(m-2)}, x^{(m-1)}\right) \in U$. Ştim că acest lucru este realizabil, căci această operație, de întoarcere de la *y* la *x* urmează operației de marcare, de la *x* la *y*;

3º – Se procedează similar până când se ajunge la vârful $x^{(0)} = x$.

Drumul căutat va fi: $\mu = \left(x, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., y\right)$.

Din descrierea algoritmului rezultă următoarele două concluzii:

1º – drumul de lungime minimă de la x la y nu este în mod necesar unic;

2º – dacă $(\exists)$ astfel de drumuri, atunci se pot determina toate.

Exemplu

Fie graful $G=\left(X,\Gamma\right)$, $X=\left\{x_1,x_2,...,x_9\right\}$, având următoarea reprezentare sagitală:

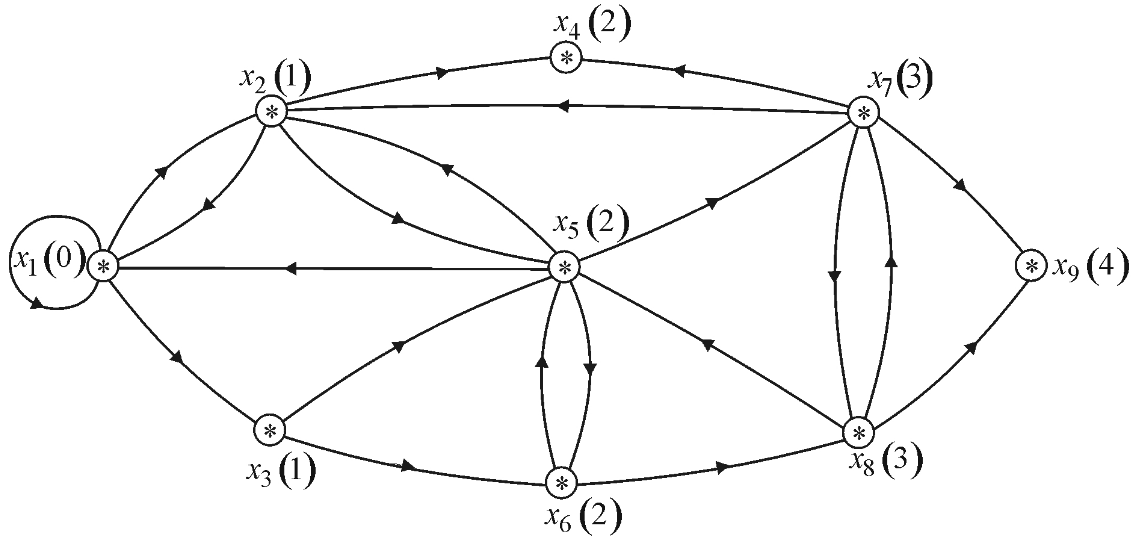


Fig. 3.2.1

Să se determine drumul de lungime minimă de la x_1 la x_9

− marcăm mai întâi vârful x_1 cu cifra 0 şi apoi marcăm cu 1 toate vârfurile x_j care respectă condiţiile:

1º arcul $\left(x_1,x_j\right)\in U$;

2º x_j nu a fost marcat. Aceste vârfuri, în cazul nostru, sunt x_2 şi x_3. (Se redesenează graful, însoţit de numerele atribuite vârfurilor sau se numerotează vârfurile cu altă culoare);

− marcăm cu cifra 2 toate vârfurile care îndeplinesc condiţiile:

1º $\left(x_i,x_j\right)\in U$ şi x_i a fost marcat cu cifra 1;

2º vârful x_j este nemarcat.

Aceste vârfuri vor fi x_4, x_5 şi x_6.

Deci, de la x_1 se poate ajunge la oricare din vârfurile x_4, x_5 sau x_6 pe un drum de lungime minimă egală cu 2.

− Marcăm cu cifra 3 vârfurile x_j, care îndeplinesc condiţiile:

1º arcul $\left(x_i,x_j\right)\in U$ şi x_i a fost marcat cu cifra 2;

2º vârful x_j este nemarcat.

Aceste vârfuri sunt x_7 şi x_8.

Vârful x_9 va fi marcat cu 4; deci lungimea minimă a drumurilor de la x_1 la x_9 este de 4 unităţi. Să determinăm, acum, un drum de lungime minimă de la x_1 la x_9.

− Reprezentăm întâi vârful x_9, marcat cu cifra 4;

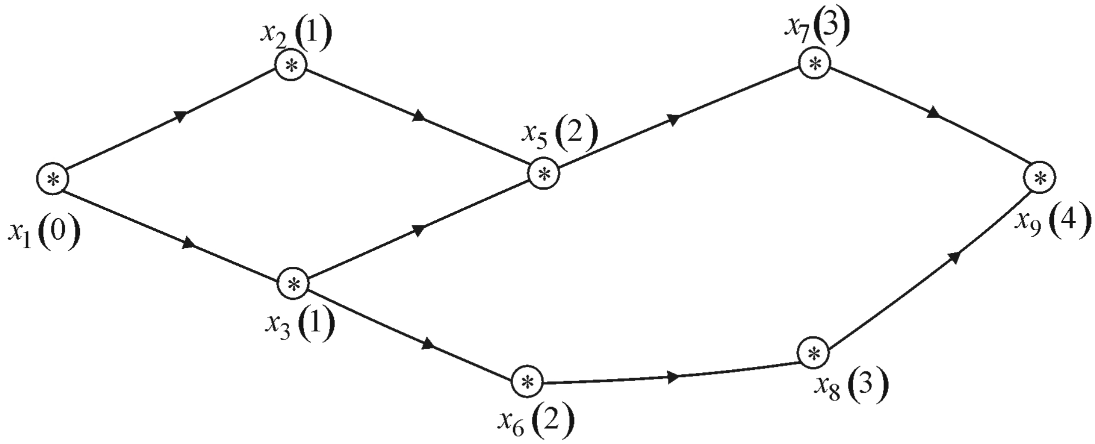


Fig. 3.2.2

– Căutăm un vârf x_i, marcat cu 3, şi astfel încât. $(x_i, x_9) \in U$. Găsim vârfurile x_7 şi x_8.

Dacă ne interesează doar un drum de lungime minimă, reţinem, la fiecare astfel de etapă, un singur vârf. Dacă ne interesează, însă, toate drumurile de lungime minimă, reţinem şi reprezentăm toate vârfurile notate cu cifra 3.

Găsim vârfurile x_7 şi x_8, marcate cu cifra 3 şi astfel încât $(x_i, x_9) \in U$ $(i \in \{7,8\})$.

– Căutăm apoi un vârf notat cu (2) şi astfel încât $(x_i, x_7) \in U$ şi $(x_i, x_8) \in U$. Găsim vârfurile x_5 şi x_6.

– Căutăm un vârf x_i marcat cu cifra 1 şi astfel încât arcul $(x_i, x_5) \in U$ şi arcul $(x_i, x_6) \in U$. Găsim vârfurile x_2 şi x_3.

– Căutăm un vârf x_i, marcat cu cifra 0 şi astfel încât arcul (x_i, x_2) sau $(x_i, x_3) \in U$

Acest vârf este x_1.

Observăm că pe un drum optim între x_1 şi x_9, vârful x_9 poate fi precedat numai de x_7 sau x_8. Analog, x_7 poate fi precedat numai de x_5, iar x_8 numai de x_6.

Mai departe, x_5 poate fi precedat de x_2 şi x_3, iar x_6 numai de x_3.

În ultima etapă, atât x_2 cât şi x_3 sunt precedate de x_1.

Deci, toate drumurile optime (în sensul lungimii minime) dintre vârfurile x_1 şi x_9 din graful prezentat în acest exemplu sunt următoarele:

$\mu_1 = (x_1, x_2, x_5, x_7, x_9)$

$\mu_2 = (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9)$

$\mu_3 = (x_1, x_3, x_6, x_8, x_9)$.

LECȚIA 7

3.3 Algoritmul lui Ford pentru determinarea drumurilor de valoare minimă între două vârfuri ale unui graf

Fie graful $G=\left(X,U\right)$ cu arce valorizate şi $x,y\in X$ două vârfuri ale sale. Presupunem că ne interesează un drum de valoare minimă între vârfurile *x* şi *y* ale garfului *G*. Pentru simplificarea expunerii, dacă *X* are $n+1$ elemente, putem numerota (renumerota) vârfurile, astfel încât $x_0=x$ şi $x_n=y$. Deci, $X=\left\{x_0,x_1,...,x_n\right\}$ şi ne interesează drumul de valoare minimă între x_0 şi x_n. Facem convenția că dacă între două vârfuri nu există nici un drum, se ia ca valoare minimă între cele două vârfuri, valoarea $+\infty$.

Admitem că pentru orice $i=1,2,...,n$ dispunem de un drum arbitrar de la x_0 la x_i (dacă astfel de drumuri există, ele se pot depista prin procedeul descris la determinarea drumului de lungime minimă între două vârfuri dintr-un graf).

Notăm valoarea drumului de la x_0 la x_i cu λ_i, $i=1,2,...,n$; $\lambda_0=0$. Dacă nu există nici un drum de la x_0 la x_i, se ia $\lambda_i=+\infty$.

Are loc următorul rezultat esențial în stabilirea algoritmului.

Teorema 3.3.1

Condiția necesară şi suficientă pentru ca λ_i să fie minimul valorilor drumurilor de la x_0 la x_i, oricare ar fi $i=1,2,...,n$, este ca pentru orice $\left(x_k,x_j\right)\in U$, să aibă loc relația:

$$\lambda_j-\lambda_k\leq\ell\left(x_k,x_j\right) \tag{3.3.1}$$

Vârfurile consecutive ale unui drum de valoare minimă de la x_0 la x_i verifică relația de mai sus cu semnul egal.

Demonstrație

Arătăm întâi că dacă $(\exists)$ un arc $\left(x_k,x_j\right)$ astfel încât

$$\lambda_j-\lambda_k>\ell\left(x_k,x_j\right) \tag{3.3.2}$$

atunci λ_j nu reprezintă minimul valorilor drumurilor de la x_0 la x_j

Fie subgraful din figura următoare:

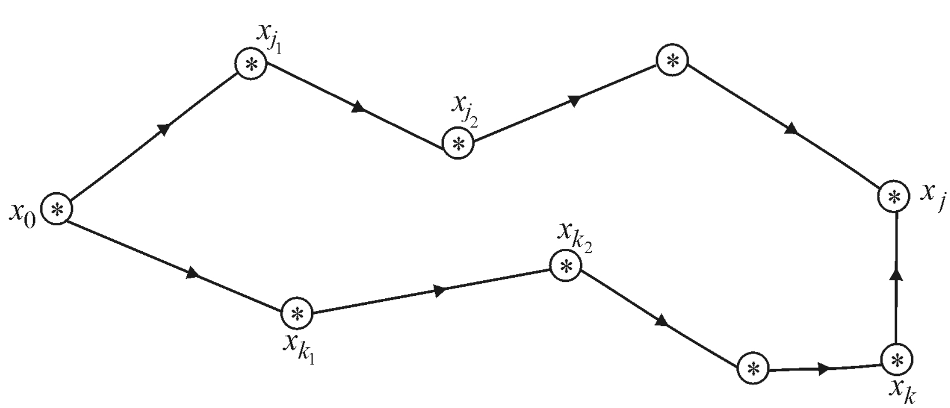


Fig. 3.3.1

Dacă $\mu_j = \left(x_0, x_{j_1}, ..., x_j\right)$ este drumul de la x_0 la x_j de valoare λ_j şi $\mu_k = \left(x_0, x_{k_1}, ..., x_k\right)$ este drumul de la x_0 la x_k de valoare λ_k, atunci drumul $\mu'_j = \left(x_0, x_{k_1}, ..., x_k, x_j\right)$ este un drum de la x_0 la x_j, la fel ca şi μ_j, dar de valoare λ'_j mai mică decât valoarea λ_j a lui μ_j. Într-adevăr avem:

$\lambda'_j = \ell\left(\mu'_j\right) = \ell\left(\mu_k\right) + \ell\left(x_k, x_j\right) = \lambda_k + \ell\left(x_k, x_j\right) < \lambda_j$, datorită relației (3.3.2), presupusă adevărată în ipoteza de lucru:

$$\lambda_j - \lambda_k > \ell\left(x_k, x_j\right)$$

Dacă însă relațiile (3.3.1) sunt verificate pentru orice arc $\left(x_k, x_j\right)$, atunci λ_i este valoarea minimă a drumurilor de la x_0 la x_i, $(\forall)\, i = 1, 2, .., n$. Într-adevăr, dacă $\mu = \left(x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}, x_i\right)$ este un drum oarecare de la de la x_0 la x_i, atunci conform cu relația 1°, avem:

$$\lambda_{i_1} - \lambda_0 \le \ell\left(x_0, x_{i_1}\right) \quad \left(j = i_1, k = 0\right)$$

$$\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1} \le \ell\left(x_{i_1}, x_{i_2}\right) \quad \left(j = i_2, k = i_1\right)$$

....

$$\lambda_i - \lambda_{i_k} \le \ell\left(x_{i_k}, x_i\right) \quad \left(j = i, k = i_k\right)$$

Prin însumarea relațiilor şi cu $\lambda_0 = 0$, rezultă:

$$\lambda_i \le \ell(\mu) \tag{3.3.3}$$

Arătăm acum că dacă λ_i sunt valorile optime, atunci vârfurile consecutive ale unui drum optim de la x_0 la x_i verifică relațiile 1° cu semnul „=”.

Dacă $\mu = \left(x_0, ..., x_k, x_j, ..., x_i\right)$ este drum de valoare minimă de la x_0 la x_i atunci subdrumul $\mu' = \left(x_0, ..., x_k, x_j\right)$ este drum de valoare minimă de la x_0 la x_j iar $\mu'' = \left(x_0, ..., x_k\right)$, este drum de valoare minimă de la x_0 la x_k şi deci avem: $\ell\left(\mu'\right) = \lambda_j$; $\ell\left(\mu''\right) = \lambda_k$. Pe de altă parte, avem că:

$$\ell\left(\mu'\right) = \ell\left(\mu''\right) + \ell\left(x_k, x_j\right) \Leftrightarrow \lambda_j - \lambda_k = \ell\left(x_k, x_j\right) \tag{3.3.4}$$

Teorema ne sugerează următorul algoritm pentru determinarea drumului (sau drumurilor) de valoare minimă de la vârful x_0 la x_n.

a) *Etapa 0*: Fiecărui vârf x_i i se ataşează o valoare $\lambda_i^{(0)}$ care să reprezinte valoarea *unui* drum de la x_0 la x_i cu $i = 1, 2, ..., n$ şi $\lambda_0^{(0)} = 0$.

b) *Etapa* $(k+1)$: pentru orice arc $\left(x_i, x_j\right)$ calculăm diferența $\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)}$ şi o comparăm cu valoarea arcului $\left(x_i, x_j\right)$. Poate apărea una din situațiile.

– b1) $(\exists)$ un arc (mai multe) $\left(x_i, x_j\right)$ astfel încât

$$\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} > \ell\left(x_i, x_j\right) \qquad \textbf{(3.3.5)}$$

În acest caz luăm

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + \ell\left(x_i, x_j\right) \qquad \textbf{(3.3.6)}$$

Dacă pentru un anumit *j* există mai mulți indici *i* care verifică (3.3.5), luăm $\lambda_j^{(k+1)}$ egal cu cea mai mică valoare dintre valorile $\lambda_i^{(k)} + \ell\left(x_i, x_j\right)$ corespunzătoare.

Dacă pentru un anumit indice *j* nu există nici un indice *i* care verifică relația (3.3.5): $\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} > \ell\left(x_i, x_j\right)$ atunci vom lua:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} \qquad \textbf{(3.3.7)}$$

– b2) Pentru orice arc $\left(x_i, x_j\right) \in U$, avem:

$$\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} \le \ell\left(x_i, x_j\right) \qquad \textbf{(3.3.8)}$$

În acest caz valorile $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, reprezintă valorile optime ale drumurilor de la x_0 la x_i şi trecem la depistarea drumului optim care ne interesează.

Dacă drumul optim de la x_0 la x_n este $\left(x_0,\ldots,x_i,x_j,x_n\right)$, determinăm mai întâi x_j, apoi x_i, ş.a.m.d. astfel:

– căutăm printre relațiile (3.3.1) satisfăcute cu semnul „=” în ultima etapă, vârful x_j care verifică relația

$$\lambda_n - \lambda_j = \ell\left(x_j, x_n\right) \qquad \textbf{(3.3.9)}$$

– odată determinat x_j, se caută printre egalitățile (3.3.1) din ultima etapă vârful x_i pentru care:

$$\lambda_j - \lambda_i = \ell\left(x_i, x_j\right),\ldots\text{etc.} \qquad \textbf{(3.3.10)}$$

– Ne oprim în momentul în care ajungem la x_0.

3.4 Exemple la algoritmul lui Ford pentru determinarea drumurilor de valoare minimă între două vârfuri ale unui graf

Exemplul 1

Să se determine drumul de valoare minimă de la x_0 la x_6, în graful din figura următoare:

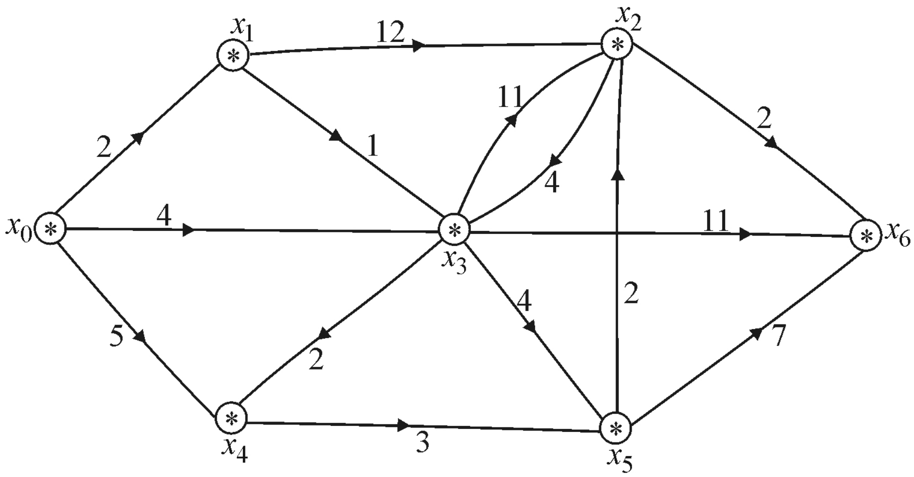


Fig. 3.4.1

Etapa 0

$\lambda_0^{(0)} = 0$;

$\lambda_1^{(0)} = \ell(x_0, x_1) = 2$;

$\lambda_2^{(0)} = \ell(x_0, x_1, x_2) = 14$; $\quad \ell(x_0, x_3, x_2) = 15 > 14$;

$\lambda_3^{(0)} = \ell(x_0, x_3) = 4$; $\quad \ell(x_0, x_1, x_3) = 3 < 4$;

$$\lambda_4^{(0)} = \ell(x_0, x_4) = 5; \quad \begin{cases} \ell(x_0, x_3, x_4) = 6 > 5; \\ \ell(x_0, x_1, x_4) = 5; \end{cases}$$

$\lambda_5^{(0)} = \ell(x_0, x_4, x_5) = 8$; $\quad \ell(x_0, x_3, x_5) = 8$;

$$\lambda_6^{(0)} = \ell(x_0, x_3, x_6) = 15; \quad \begin{cases} \ell(x_0, x_3, x_5, x_6) = 15; \\ \ell(x_0, x_4, x_5, x_6) = 15; \\ \ell(x_0, x_1, x_2, x_6) = 16 > 15; \\ \ell(x_0, x_1, x_3, x_6) = 14; \\ \ell(x_0, x_4, x_5, x_2, x_6) = 12. \end{cases}$$

Observație

În etapa „0”, fiecărui vârf x_i i se ataşează o valoare $\lambda_i^{(0)}$, care reprezintă valoarea unui drum de la x_0 la x_i, $i = \overline{1,n}$, $\lambda_0^{(0)} = 0$, fără însă a avea grijă ca un astfel de drum, între x_0 şi x_i, să fie valoare minimă dintre toate drumurile posibile între cele două vârfuri.

Etapa 1. ($k+1$, pentru $k=0$). Pentru fiecare arc $\left(x_i,x_j\right)\in U$, vom face diferența $\lambda_j^{(0)}-\lambda_i^{(0)}$ şi o vom compara cu $\ell\left(x_i,x_j\right)$. În prima coloană scriem toate arcele grafului, începând de la x_6 până la x_0.

Vârful x_6:

$$\begin{cases}\left(x_5,x_6\right):\lambda_6^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=7=\ell\left(x_5,x_6\right);\\ \left(x_3,x_6\right):\lambda_6^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=11=\ell\left(x_3,x_6\right);\\ \left(x_2,x_6\right):\lambda_6^{(0)}-\lambda_2^{(0)}=1<\ell\left(x_2,x_6\right)=2;\end{cases}$$

Vârful x_5:

$$\begin{cases}\left(x_4,x_5\right):\lambda_5^{(0)}-\lambda_4^{(0)}=3=\ell\left(x_4,x_5\right);\\ \left(x_3,x_5\right):\lambda_5^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=4=\ell\left(x_3,x_5\right);\end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases}\left(x_3,x_4\right):\lambda_4^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=1<\ell\left(x_3,x_4\right)=2;\\ \left(x_0,x_7\right):\lambda_4^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=5=\ell\left(x_0,x_4\right);\end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases}\left(x_2,x_3\right):\lambda_3^{(0)}-\lambda_2^{(0)}=-10<\ell\left(x_2,x_3\right)=4;\\ \left(x_1,x_3\right):\lambda_3^{(0)}-\lambda_1^{(0)}=2>\ell\left(x_1,x_3\right)=1;\quad (*)\\ \left(x_0,x_3\right):\lambda_3^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=4=\ell\left(x_0,x_3\right);\end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases}\left(x_5,x_2\right):\lambda_2^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=6>\ell\left(x_5,x_2\right)=2;\quad (*)\\ \left(x_3,x_2\right):\lambda_2^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=10<\ell\left(x_3,x_2\right)=11;\\ \left(x_1,x_2\right):\lambda_2^{(0)}-\lambda_1^{(0)}=12=\ell\left(x_1,x_2\right);\end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\left\{\left(x_0,x_1\right):\lambda_1^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=2=\ell\left(x_0,x_1\right).\right.$$

În etapa 1 am depistat două cazuri în care are loc relația (3.3.5):

$$\lambda_j^{(k)}-\lambda_i^{(k)}>\ell\left(x_i,x_j\right),\ k=0$$

şi doar în aceste cazuri două cazuri este posibilă îmbunătățirea (în sensul micşorării) valorilor pentru $\lambda_j^{(k+1)}$, prin relația:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + \ell\left(x_i, x_j\right),\ k = 0 \text{ (punctul b}_1\text{) din algoritm).}$$

Pentru etapa următoare vom lua:

$\lambda_3^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + \ell\left(x_1, x_3\right) = 2 + 1 = 3$;

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_5^{(0)} + \ell\left(x_5, x_2\right) = 8 + 2 = 10$;

$\lambda_j^{(1)} = \lambda_j^{(0)}$ pentru toți indicii $j \neq 2$, $j \neq 3$.

Etapa 2. ($k+1$, pentru $k = 1$). Actualizăm toate valorile pentru $\lambda_j^{(1)}$, $j = 0,1,2,...,6$:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(1)} = 0;\ \lambda_1^{(1)} = 2;\ \lambda_2^{(1)} = 10 \quad (*);\ \lambda_3^{(1)} = 3 \quad (*); \\ \lambda_4^{(1)} = 5;\ \lambda_5^{(1)} = 8;\ \lambda_6^{(1)} = 15. \end{cases}$$

Comparăm diferențele $\lambda_j^{(1)} - \lambda_i^{(1)}$ cu $\ell\left(x_i, x_j\right)$ pentru toate arcele $\left(x_i, x_j\right) \in U$:

Vârful x_6:

$$\begin{cases} \lambda_6^{(1)} - \lambda_5^{(1)} = 15 - 8 = 7 = \ell\left(x_5, x_6\right); \\ \lambda_6^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = 15 - 3 = 12 > \ell\left(x_3, x_6\right) = 11; \quad (*) \\ \lambda_6^{(1)} - \lambda_2^{(1)} = 15 - 10 = 5 > \ell\left(x_2, x_6\right) = 2; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_5:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(1)} - \lambda_4^{(1)} = 8 - 5 = 3 = \ell\left(x_4, x_5\right); \\ \lambda_5^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = 8 - 3 = 5 > \ell\left(x_3, x_5\right) = 4; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = 5 - 3 = 2 = \ell\left(x_3, x_4\right); \\ \lambda_4^{(1)} - \lambda_0^{(1)} = 5 - 0 = 5 = \ell\left(x_0, x_4\right); \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases} \lambda_3^{(1)} - \lambda_2^{(1)} = 3 - 10 = -7 < \ell\left(x_2, x_3\right) = 4; \\ \lambda_3^{(1)} - \lambda_1^{(1)} = 3 - 2 = \ell\left(x_1, x_3\right); \\ \lambda_3^{(1)} - \lambda_0^{(1)} = 3 - 0 = 3 < \ell\left(x_0, x_3\right) = 4; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} \lambda_2^{(1)} - \lambda_5^{(1)} = 10 - 8 = 2 = \ell(x_5, x_2); \\ \lambda_2^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = 10 - 3 = 7 < \ell(x_3, x_2) = 11; \\ \lambda_2^{(1)} - \lambda_1^{(1)} = 10 - 2 = 8 < \ell(x_1, x_2) = 12; \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\left\{ \lambda_1^{(1)} - \lambda_0^{(1)} = 2 - 0 = 2 = \ell(x_0, x_1). \right.$$

Relația (3.3.5): $\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} > \ell(x_i, x_j)$, $k = 1$, are loc în trei situații, marcate cu (*).

Pot fi îmbunătățite valorile $\lambda_6^{(1)}$ (în două cazuri) şi $\lambda_5^{(1)}$. Pentru $\lambda_6^{(1)}$ avem:

$\lambda_6^{(2)} = \lambda_3^{(1)} + \ell(x_3, x_6) = 3 + 11 = 14$ sau $\lambda_6^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + \ell(x_2, x_6) = 10 + 2 = 12$.

Deoarece căutăm un drum de valoare minimă, vom alege valoare mai mică: $\lambda_6^{(2)} = 12$.

Pentru $\lambda_5^{(2)}$ vom avea: $\lambda_5^{(2)} = \lambda_3^{(1)} + \ell(x_3, x_5) = 3 + 4 = 7$, deci $\lambda_5^{(2)} = 7$.

În rest, pentru toți indicii $j \neq 5, 6$, vom avea: $\lambda_5^{(2)} = \lambda_j^{(1)}$.

Etapa 3. ($k+1$, pentru $k = 2$). Actualizăm toate valorile pentru $\lambda_j^{(2)}$, $j = 0, 1, 2, ..., 6$:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(2)} = 0; \ \lambda_1^{(2)} = 2; \ \lambda_2^{(2)} = 10; \ \lambda_3^{(2)} = 3; \\ \lambda_4^{(2)} = 5; \ \lambda_5^{(2)} = 7; \ \lambda_6^{(2)} = 12. \end{cases}$$

Comparăm diferențele $\lambda_j^{(2)} - \lambda_i^{(2)}$ cu $\ell(x_i, x_j)$ pentru toate arcele $(x_i, x_j) \in U$:

Vârful x_6:

$$\begin{cases} \lambda_6^{(2)} - \lambda_5^{(2)} = 12 - 7 = 5 < \ell(x_5, x_6) = 7; \\ \lambda_6^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = 12 - 3 = 9 < \ell(x_3, x_6) = 11; \\ \lambda_6^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 12 - 10 = 2 = \ell(x_2, x_6); \end{cases}$$

Vârful x_5:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(2)} - \lambda_4^{(2)} = 7 - 5 = 2 < \ell(x_4, x_5) = 3; \\ \lambda_5^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = 7 - 3 = 4 = \ell(x_3, x_5); \end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = 5 - 3 = 2 = \ell(x_3, x_4); \\ \lambda_4^{(2)} - \lambda_0^{(2)} = 5 - 0 = 5 = \ell(x_0, x_4); \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases} \lambda_3^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 3 - 10 = -7 < \ell(x_2, x_3) = 4; \\ \lambda_3^{(2)} - \lambda_1^{(2)} = 3 - 2 = 1 = \ell(x_1, x_3); \\ \lambda_3^{(2)} - \lambda_0^{(2)} = 3 - 0 = 3 < \ell(x_0, x_3) = 4; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} \lambda_2^{(2)} - \lambda_5^{(2)} = 10 - 7 = 3 > \ell(x_5, x_2) = 2; \quad (*) \\ \lambda_2^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = 10 - 3 = 7 < \ell(x_3, x_2) = 11; \\ \lambda_2^{(2)} - \lambda_1^{(2)} = 10 - 2 = 8 < \ell(x_1, x_2) = 12; \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\left\{ \lambda_1^{(2)} - \lambda_0^{(2)} = 2 - 0 = 2 = \ell(x_0, x_1). \right.$$

În această etapă singura valoare care se îmbunătățeşte este $\lambda_2^{(2)}$, astfel că pentru etapa următoare $(k = 3)$ vom lua: $\lambda_2^{(3)} = \lambda_5^{(2)} + \ell(x_5, x_2) = 7 + 2 = 9$.

În rest, pentru $j \neq 2$ vom avea: $\lambda_j^{(3)} = \lambda_j^{(2)}$.

Etapa 4. ($k+1$, pentru $k = 3$). Actualizăm valorile pentru $\lambda_j^{(3)}$, $j = 0,1,2,...,6$

$$\begin{cases} \lambda_0^{(3)} = 0;\ \lambda_1^{(3)} = 2;\ \lambda_2^{(3)} = 9;\ \lambda_3^{(3)} = 3; \\ \lambda_4^{(3)} = 5;\ \lambda_5^{(3)} = 7;\ \lambda_6^{(3)} = 12. \end{cases}$$

Comparăm diferențele $\lambda_j^{(3)} - \lambda_i^{(3)}$ cu $\ell(x_i, x_j)$ pentru toate arcele $(x_i, x_j) \in U$. Obținem următoarele valori:

Vârful x_6:

$$\begin{cases} \lambda_6^{(3)} - \lambda_5^{(3)} = 12 - 7 = 5 < \ell(x_5, x_6) = 7; \\ \lambda_6^{(3)} - \lambda_3^{(3)} = 12 - 3 = 9 < \ell(x_3, x_6) = 11; \\ \lambda_6^{(3)} - \lambda_2^{(3)} = 12 - 9 = 3 > \ell(x_2, x_6) = 2; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_5:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(3)} - \lambda_4^{(3)} = 7 - 5 = 2 < \ell(x_4, x_5) = 3; \\ \lambda_5^{(3)} - \lambda_3^{(3)} = 7 - 3 = 4 < \ell(x_3, x_5) = 4; \end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(3)} - \lambda_3^{(3)} = 5 - 3 = 2 = \ell(x_3, x_4); \\ \lambda_4^{(3)} - \lambda_0^{(3)} = 5 - 0 = 5 = \ell(x_0, x_4); \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases} \lambda_3^{(3)} - \lambda_2^{(3)} = 3 - 9 = -6 < \ell(x_2, x_3) = 4; \\ \lambda_3^{(3)} - \lambda_1^{(3)} = 3 - 2 = 1 = \ell(x_1, x_3); \\ \lambda_3^{(3)} - \lambda_0^{(3)} = 3 - 0 = 3 < \ell(x_0, x_3) = 4; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} \lambda_2^{(3)} - \lambda_5^{(3)} = 9 - 7 = 2 = \ell(x_5, x_2); \\ \lambda_2^{(3)} - \lambda_3^{(3)} = 9 - 3 = 6 < \ell(x_3, x_2) = 11; \\ \lambda_2^{(3)} - \lambda_1^{(3)} = 9 - 2 = 7 < \ell(x_1, x_2) = 12; \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\left\{ \lambda_1^{(3)} - \lambda_0^{(3)} = 2 - 0 = 2 = \ell(x_0, x_1). \right.$$

Singura valoare care se îmbunătățeşte este $\lambda_6^{(3)}$ şi pentru etapa următoare vom lua: $\lambda_6^{(4)} = \lambda_2^{(3)} + \ell(x_2, x_6) = 9 + 2 = 11$. În rest, pentru toți indicii $j \neq 6$ vom lua: $\lambda_j^{(4)} = \lambda_j^{(3)}$.

Etapa 5. ($k+1$, pentru $k = 4$). Actualizarea valorilor pentru $\lambda_j^{(4)}$:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(4)} = 0;\ \lambda_1^{(4)} = 2;\ \lambda_2^{(4)} = 9;\ \lambda_3^{(4)} = 3; \\ \lambda_4^{(4)} = 5;\ \lambda_5^{(4)} = 7;\ \lambda_6^{(4)} = 11. \end{cases}$$

Comparăm diferențele $\lambda_j^{(4)} - \lambda_i^{(4)}$ cu $\ell(x_i, x_j)$ pentru toate arcele $(x_i, x_j) \in U$:

Vârful x_6:

$$\begin{cases} \lambda_6^{(4)} - \lambda_5^{(4)} = 11 - 7 = 4 < \ell(x_5, x_6) = 7; \\ \lambda_6^{(4)} - \lambda_3^{(4)} = 11 - 3 = 8 < \ell(x_3, x_6) = 11; \\ \lambda_6^{(4)} - \lambda_2^{(4)} = 11 - 9 = 2 = \ell(x_2, x_6); \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_5:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(4)} - \lambda_4^{(4)} = 7 - 5 = 2 < \ell(x_4, x_5) = 3; \\ \lambda_5^{(4)} - \lambda_3^{(4)} = 7 - 3 = 4 = \ell(x_3, x_5); \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(4)} - \lambda_3^{(4)} = 5 - 3 = 2 = \ell(x_3, x_4); & (*) \\ \lambda_4^{(4)} - \lambda_0^{(4)} = 5 - 0 = 5 = \ell(x_0, x_4); & (*) \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases} \lambda_3^{(4)} - \lambda_2^{(4)} = 3 - 9 = -6 < \ell(x_2, x_3) = 4; \\ \lambda_3^{(4)} - \lambda_1^{(4)} = 3 - 2 = 1 = \ell(x_1, x_3); \quad (*) \\ \lambda_3^{(4)} - \lambda_0^{(4)} = 3 - 0 = 3 < \ell(x_0, x_3) = 4; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} \lambda_2^{(4)} - \lambda_5^{(4)} = 9 - 7 = 2 = \ell(x_5, x_2); \quad (*) \\ \lambda_2^{(4)} - \lambda_3^{(4)} = 9 - 3 = 6 < \ell(x_3, x_2) = 11; \\ \lambda_2^{(4)} - \lambda_1^{(4)} = 9 - 2 = 7 < \ell(x_1, x_2) = 12; \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\left\{ \lambda_1^{(4)} - \lambda_0^{(4)} = 2 - 0 = 2 = \ell(x_0, x_1). \quad (*) \right.$$

Constatăm că la sfârşitul etapei a 5-a, în toate relațiile obținute nu mai apare semnul „>”, deci, conform teoremei demonstrate anterior, valorile $\lambda_i = \lambda_1^{(4)},\ i = 0,1,2,...,6$, sunt valorile optime.

Etapa finală a algoritmului presupune determinarea drumului optim (de valoare minimă), de la x_6 la x_0. În ultima etapă am marcat cu (*) toate relațiile (3.3.1) satisfăcute cu semnul „=”. Dacă notăm cu i penultimul vârf al acestui drum, atunci indicele i verifică ecuația: $\lambda_6 - \lambda_i = \ell(x_i, x_6)$ (a se vedea relația nr. 3.3.9). Vom căuta printre egalitățile (*) din relațiile scrise în ultima etapă şi care corespund vârfului x_6, indicele sau indicii i care verifică această relație tip egalitate. Rezultă $i = 2$. Deci, pe drumul optim de la x_0 la x_6, ultimul arc este (x_2, x_6).

Fie acum x_i vârful care-l precede pe x_2 pe drumul optim. Trebuie să avem, conform relației (3.3.10), îndeplinită condiția: $\lambda_2 - \lambda_i = \ell(x_i, x_2)$. Căutăm la relațiile corespunzătoare vârfului x_2 şi găsim: $\lambda_2 - \lambda_5 = 2 = \ell(x_5, x_2)$. Deci x_5 îl precede pe x_2 pe drumul optim. Mai departe:

Rezultă: $\begin{cases} \lambda_5 - \lambda_i = \ell(x_i, x_5) \Rightarrow i = 3; \\ \lambda_5 - \lambda_3 = 4 = \ell(x_3, x_5). \end{cases}$

Apoi: $\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_i = \ell(x_i, x_3) \Rightarrow i = 1; \\ \lambda_3 - \lambda_1 = \ell(x_1, x_3) = 1. \end{cases}$

În sfârşit: $\lambda_1 - \lambda_0 = 2 = \ell(x_0, x_1) \Rightarrow i = 0$

Deci, drumul de valoare optimă (minimă) de la x_0 la x_6 este:

$\mu = (x_0, x_1, x_3, x_5, x_2, x_6)$.

Observație

1. Algoritmul se poate programa ușor.

2. Se poate evita etapa inițială a determinării unor drumuri de la x_0 la x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, astfel:

– în etapa „0” (inițială) se iau valorile: $\lambda_0^{(0)} = 0$ și $\lambda_i^{(0)} = M$, unde M este un număr mai mare decât, de exemplu, suma valorilor tuturor arcelor grafului. De obicei se ia $M = +\infty$ și se utilizează convenția $+\infty - \infty = 0$;

– pornind de la aceste valori inițiale se fac îmbunătățiri succesive, conform algoritmului prezentat până la obținerea valorilor optime. Acest algoritm se numește „algoritmul lui Ford”.

Exemplul 2

Să se determine drumul de valoare minimă între x_0 și x_5 în graful următor:

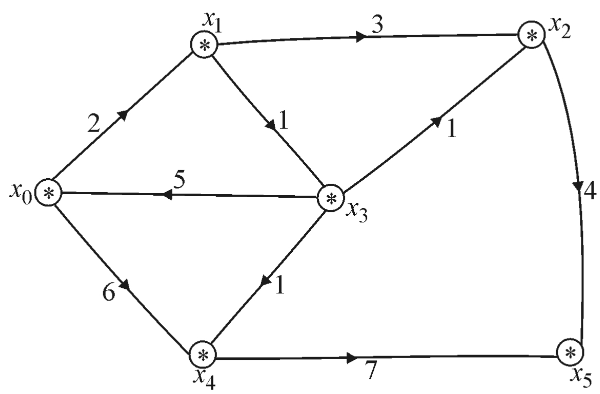


Fig. 3.4.2

La sfârșitul etapei a 4-a constatăm că toate relațiile (3.3.1) sunt de forma „$\leq$”: $\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} \leq \ell(x_i, x_j)$, $k = 4$, deci valorile $\lambda_i^{(4)}$ sunt valorile optime ($\lambda_j^{(4)} - \lambda_i^{(4)} \leq \ell(x_i, x_j)$, $(\forall)(x_i, x_j) \in U$).

Depistarea drumului optim de la x_0 la x_5

Notăm cu x_i penultimul vârf pe drumul optim. Atunci, pentru indicele i avem relația: $\lambda_5 - \lambda_i \leq \ell(x_i, x_5)$, în etapa $k = 4$. Rezultă: $\lambda_5^{(4)} - \lambda_2^{(4)} = \ell(x_2, x_5) = 4$. Deci, penultimul vârf este x_2: $\mu = (\dots, x_2, x_5)$.

Fie acum, x_i vârful care precede pe x_2 pe drumul optim. Vom avea: $\lambda_2^{(4)} - \lambda_i^{(4)} = \ell(x_i, x_2)$. Pentru vârful x_2 această relație este verificată pentru $i = 3$, $\lambda_2^{(4)} - \lambda_3^{(4)} = \ell(x_3, x_2) = 1$. Rezultă că predecesorul lui x_2, pe drumul optim este vârful x_3; $\mu = (x_0, \dots, x_3, x_2, x_5)$.

Fie x_i vârful care precede pe x_3, pe drumul optim. Avem:

$\lambda_3^{(4)} - \lambda_i^{(4)} = \ell(x_i, x_4)$.

Singurul vârf pentru care are loc egalitatea este x_1. Deci, $\mu = (x_0, ..., x_1, x_3, x_2, x_5)$. Mai departe: $\lambda_1^{(4)} - \lambda_i^{(4)} = \ell(x_i, x_1) \Rightarrow i = 0$ (singurul vârf pentru care are loc relația de egalitate).

Aşadar, drumul optim (de valoare minimă) este:

$\mu = (x_0, x_1, x_3, x_2, x_5)$ şi $\ell(\mu) = 8$.

Rezultatele calculelor vor fi trecute într-un tabel:

arce (x_i,x_j)	$\ell(x_i,x_j)$	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_j^{(0)}-\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_j^{(1)}-\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_j^{(2)}-\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_j^{(3)}-\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_j^{(4)}-\lambda_i^{(4)}$
Vârful x_5											
(x_4,x_5)	7	$\lambda_0^{(0)}=0$	0	$\lambda_0^{(1)}=0$	$+\infty$ (*)	$\lambda_0^{(2)}=0$	7	$\lambda_0^{(3)}=0$	5	$\lambda_0^{(4)}=0$	$4<$
(x_2,x_5)	4	$\lambda_1^{(0)}=\infty$	0	$\lambda_1^{(1)}=2$	0	$\lambda_1^{(2)}=2$	8 (*)	$\lambda_1^{(3)}=2$	5 (*)	$\lambda_1^{(4)}=2$	4 „=”
Vârful x_4											
(x_3,x_4)	1	$\lambda_2^{(0)}=\infty$	0	$\lambda_2^{(1)}=\infty$	$-\infty$	$\lambda_2^{(2)}=5$	3 (*)	$\lambda_2^{(3)}=4$	1	$\lambda_2^{(4)}=4$	1 „=”
(x_0,x_4)	6	$\lambda_3^{(0)}=\infty$	∞ (*)	$\lambda_3^{(1)}=+\infty$	6	$\lambda_3^{(2)}=3$	6	$\lambda_3^{(3)}=3$	4	$\lambda_3^{(4)}=3$	$4<$
Vârful x_3											
(x_1,x_3)	1	$\lambda_4^{(0)}=\infty$	0	$\lambda_4^{(1)}=6$	$+\infty$ (*)	$\lambda_4^{(2)}=6$	1	$\lambda_4^{(3)}=4$	1	$\lambda_4^{(4)}=4$	1 „=”
Vârful x_2											
(x_3,x_2)	1	$\lambda_5^{(0)}=\infty$	0	$\lambda_5^{(1)}=\infty$	0	$\lambda_5^{(2)}=13$	2 (*)	$\lambda_5^{(3)}=9$	1	$\lambda_5^{(4)}=8$	1 „=”
(x_1,x_2)	3		0		$+\infty$ (*)		3		2		$2<$
Vârful x_1											
(x_0,x_1)	2		∞ (*)		2		2		2		2 „=”
Vârful x_0											
(x_3,x_0)	5		$-\infty$		$-\infty$		-3		-3		$-3<$

$\lambda_4^{(1)}=\lambda_0^{(0)}+\ell(x_0,x_4)=6$
$\lambda_1^{(1)}=\lambda_0^{(0)}+\ell(x_0,x_1)=2$
$\lambda_i^{(1)}=\lambda_i^{(0)},(\forall\, i\neq 1.4)$

$\lambda_5^{(2)}=\lambda_4^{(1)}+\ell(x_4,x_5)=6+7=13$
$\lambda_3^{(2)}=\lambda_1^{(1)}+\ell(x_1,x_3)=2+1=3$
$\lambda_2^{(2)}=\lambda_1^{(1)}+\ell(x_1,x_2)=2+3=5$

$\lambda_5^{(3)}=\lambda_2^{(2)}+\ell(x_2,x_5)=5+4=9$
$\lambda_4^{(3)}=\lambda_3^{(2)}+\ell(x_3,x_4)=3+1=4$
$\lambda_2^{(3)}=\lambda_3^{(2)}+\ell(x_3,x_2)=3+1=4$

$\lambda_5^{(4)}=\lambda_2^{(3)}+\ell(x_2,x_5)=4+4=8$

3.6 Algoritmul lui Ford pentru determinarea drumurilor de valoare maximă dintre două vârfuri ale unui graf fără circuite. Exemple.

Dacă $G=(X,U)$ este un graf fără circuite, putem căuta drumuri de valoare maximă între două vârfuri distincte ale grafului. Deoarece într-un graf finit există un număr finit de drumuri, atunci dacă există drumuri între vârfurile distincte *x* şi *y*, printre ele există (cel puțin) unul de valoare maximă.

Dacă între două vârfuri nu există nici un drum vom spune în mod convențional că valoare maximă este $-\infty$. Presupunem că $X=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ şi că ne interesează drumul de valoare maximă de la x_0 la x_n.

Dacă λ_i reprezintă valoarea unui drum de la x_0 la x_i, putem enunța o teoremă analoagă celei din cazul determinării drumului de valoare minimă dintre două vârfuri distincte ale grafului:

Teoremă 3.6.1

Condiția necesară şi suficientă pentru ca λ_i să fie valoarea maximă a drumurilor de la x_0 la x_i ($i=1,2,...,n$) este ca pentru orice $(x_i,x_j)\in U$ să aibă loc relația:

$$\lambda_j-\lambda_i\geq \ell(x_i,x_j),\ (\lambda_0=0). \tag{3.6.1}$$

Vârfurile consecutive ale unui drum optim de la x_0 la x_i ($i\neq 0$) verifică relația cu semnul „=".

Demonstrația este analoagă celei de la teorema anterioară.

Pe baza teoremei se dezvoltă algoritmul lui Ford, pentru determinarea drumului de valoare maximă dintre vârfurile x_0 şi x_n.

În prima etapă, fie se calculează valorile inițiale $\lambda_0^{(0)},\lambda_1^{(0)},...,\lambda_n^{(0)}$, $\lambda_0^{(0)}=0$, fie se pleacă de la următoarele valori: $\lambda_0^{(0)}=0$; $\lambda_1^{(0)}=\lambda_2^{(0)}=...=\lambda_n^{(0)}=-\infty$, cu convenția $-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty=0$.

În etapele următoare aceste valori se vor îmbunătăți succesiv până la obținerea valorilor optime.

Astfel, dacă la etapa $k+1$ există un arc (x_i,x_j) astfel încât

$$\lambda_j^{(k)}-\lambda_i^{(k)}<\ell(x_i,x_j), \tag{3.6.2}$$

atunci valoarea $\lambda_j^{(k)}$ poate fi îmbunătățită, luând pentru etapa următoare,

$$\lambda_j^{(k+1)}=\lambda_i^{(k)}+\ell(x_i,x_j)>\lambda_j^{(k)}. \tag{3.6.3}$$

Procesul continuă până când nici una din valorile $\lambda_j^{(k)}$, $j=1,...,n$ nu mai poate fi îmbunătățită. La sfârşitul acestei etape se obțin valorile optime pentru λ_j şi se trece la determinarea drumului optim (de valoare maximă) de la x_0 la x_n, analog ca în cazul drumurilor de valoare minimă.

Exemplul 1

Să se determine drumul de valoare maximă de la x_0 şi x_5 în graful următor:

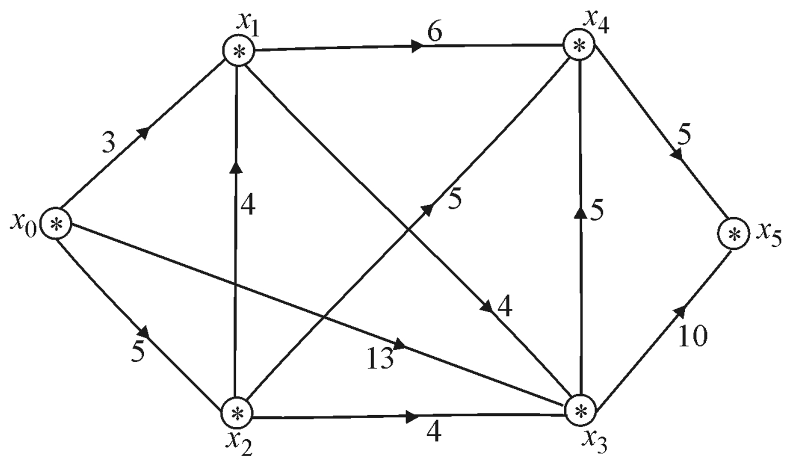


Fig. 3.6.1

Etapa 1. ($k+1$, pentru $k=0$).

Pentru început luăm: $\lambda_0^{(0)}=0$; $\lambda_1^{(0)}=\lambda_2^{(0)}=...=\lambda_5^{(0)}=-\infty$.

Dintre aceste valori singurele care se îmbunătăţesc sunt $\lambda_1^{(0)}$ şi $\lambda_2^{(0)}$, astfel:

$\lambda_1^{(1)}=\lambda_0^{(0)}+\ell(x_0,x_1)=3$;

$\lambda_2^{(1)}=\lambda_0^{(0)}+\ell(x_0,x_2)=5$.

Pentru celelalte valori, în etapa următoare luăm: $\lambda_3^{(1)}=\lambda_4^{(1)}=\lambda_5^{(1)}=-\infty$; $\lambda_0^{(1)}=0$.

Etapa 2. ($k+1$, pentru $k=1$). Se calculează pentru toate arcele $(x_i,x_j)\in U$, diferenţele $\lambda_j^{(1)}-\lambda_i^{(1)}$ şi se compară cu $\ell(x_i,x_j)$.

Vârful x_5:

$$\begin{cases}(x_4,x_5):\lambda_5^{(1)}-\lambda_4^{(1)}=0<\ell(x_4,x_5)=5;\\(x_3,x_5):\lambda_5^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=0<\ell(x_3,x_5)=10;\end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases}(x_3,x_4):\lambda_4^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=0<\ell(x_3,x_4)=5;\\(x_2,x_4):\lambda_4^{(1)}-\lambda_2^{(1)}=-\infty<\ell(x_2,x_4)=5;\quad(*)\\(x_1,x_4):\lambda_4^{(1)}-\lambda_1^{(1)}=-\infty<\ell(x_1,x_4)=6;\quad(*)\end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases}(x_2,x_3):\lambda_3^{(1)}-\lambda_2^{(1)}=-\infty<\ell(x_2,x_3)=4; & (*)\\ (x_1,x_3):\lambda_3^{(1)}-\lambda_1^{(1)}=-\infty<\ell(x_1,x_3)=4; & (*)\\ (x_0,x_3):\lambda_3^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=-\infty<\ell(x_0,x_3)=13; & (*)\end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\left\{(x_0,x_2):\lambda_2^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=5=\ell(x_0,x_2);\right.$$

Vârful x_1:

$$\begin{cases}(x_2,x_1):\lambda_1^{(1)}-\lambda_2^{(1)}=3-5=-2<\ell(x_2,x_1)=4; & (*)\\ (x_0,x_1):\lambda_1^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=3=\ell(x_0,x_1).\end{cases}$$

Au fost marcate cu (*) relațiile care pot aduce efectiv îmbunătățiri valorilor λ_j. Primele trei relații, deşi sunt de forma $\lambda_j-\lambda_i<\ell(x_i,x_j)$, nu aduc practic nici o îmbunătățire. De exemplu, din prima relație, pentru (x_4,x_5), ar trebui să luăm: $\lambda_5^{(2)}=\lambda_4^{(1)}+\ell(x_4,x_5)=-\infty$. Aceasta se întâmplă pentru toate arcele $(x_i,x_j)\in U$, pentru care $\lambda_i=\lambda_j=-\infty$ şi $\ell(x_i,x_j)>0$ şi finit.

Se pot îmbunătăți valorile: $\lambda_4^{(1)}$, $\lambda_3^{(1)}$, $\lambda_1^{(1)}$ şi le vom calcula:

$$\begin{cases}\lambda_4^{(2)}=\lambda_2^{(1)}+\ell(x_2,x_4)=5+5=10;\\ \lambda_4^{(2)}=\lambda_1^{(1)}+\ell(x_1,x_4)=3+6=9.\end{cases}$$

Cum noi căutăm drumul de valoare maximă, alegem $\lambda_4^{(2)}=10$.

Pentru $\lambda_3^{(2)}$: $\begin{cases}\lambda_3^{(2)}=\lambda_2^{(1)}+\ell(x_2,x_3)=5+4=9;\\ \lambda_3^{(2)}=\lambda_1^{(1)}+\ell(x_1,x_3)=3+4=7;\\ \lambda_3^{(2)}=\lambda_0^{(1)}+\ell(x_0,x_3)=0+13=13.\end{cases}$

Alegem $\lambda_3^{(2)}=13$ (valoarea maximă).

Pentru $\lambda_1^{(1)}$: $\begin{cases}\lambda_1^{(2)}=\lambda_2^{(1)}+\ell(x_2,x_1)=5+4=9;\\ \lambda_1^{(2)}=\lambda_0^{(1)}+\ell(x_0,x_1)=0+3=3.\end{cases}$

Alegem $\lambda_1^{(2)}=9$ (valoarea maximă).

Pentru celelalte valori ale lui *j*, $j\in\{0,2,5\}$, păstrăm valorile anterioare:

$\lambda_0^{(2)}=\lambda_0^{(1)}=0$, $\lambda_2^{(2)}=\lambda_2^{(1)}=5$, $\lambda_5^{(2)}=\lambda_5^{(1)}=-\infty$.

Se recalculează, pentru toate arcele $(x_i,x_j)\in U$, diferențele: $\lambda_j^{(2)}-\lambda_i^{(2)}$ şi se compară cu $\ell(x_i,x_j)$.

Valorile actualizate ale numerelor λ_j pentru etapa a 3-a sunt, deci

$\lambda_0^{(2)} = 0$, $\lambda_1^{(2)} = 9$, $\lambda_2^{(2)} = 5$, $\lambda_3^{(2)} = 13$, $\lambda_4^{(2)} = 10$, $\lambda_5^{(2)} = -\infty$.

Etapa 3. ($k+1$ pentru $k=2$)

Vârful x_5:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(2)} - \lambda_4^{(2)} = -\infty < \ell(x_4, x_5) = 5; \quad (*) \\ \lambda_5^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = -\infty < \ell(x_3, x_5) = 10; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = -3 < \ell(x_3, x_4) = 5; \quad (*) \\ \lambda_4^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 5 = \ell(x_2, x_4); \\ \lambda_4^{(2)} - \lambda_1^{(2)} = 1 < \ell(x_1, x_4) = 6; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases} \lambda_3^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 8 > \ell(x_2, x_3) = 4; \\ \lambda_3^{(2)} - \lambda_1^{(2)} = 4 = \ell(x_1, x_3); \\ \lambda_3^{(2)} - \lambda_0^{(2)} = 13 = \ell(x_0, x_3); \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} \lambda_2^{(2)} - \lambda_0^{(2)} = 5 = \ell(x_0, x_2); \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 4 = \ell(x_2, x_1); \\ \lambda_1^{(2)} - \lambda_0^{(2)} = 9 > \ell(x_0, x_1) = 3. \end{cases}$$

Inegalitățile $\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} < \ell(x_i, x_j)$ au fost marcate cu (*). Se pot îmbunătăți $\lambda_5^{(2)}$ şi $\lambda_4^{(2)}$. Valoarea îmbunătățită pentru etapa următoare se calculează cu relația:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + \ell(x_i, x_j) \quad \left(> \lambda_i^{(k)}\right).$$

Pentru λ_5 avem:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(3)} = \lambda_4^{(2)} + \ell(x_4, x_5) = 10 + 5 = 15; \\ \lambda_5^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + \ell(x_3, x_5) = 13 + 10 = 23. \end{cases}$$

Vom lua $\lambda_5^{(3)} = 23$, deoarece căutăm drumul de valoare maximă între valorile x_0 şi x_5.

Pentru λ_4 avem:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + \ell(x_3, x_4) = 13 + 5 = 18; \\ \lambda_4^{(3)} = \lambda_1^{(2)} + \ell(x_1, x_4) = 9 + 6 = 15. \end{cases}$$

Din acelaşi motiv vom lua, pentru etapa următoare, $\lambda_4^{(3)} = 18$.

Valorile actualizate ale numerelor λ_j pentru etapa a 4-a sunt:

$\lambda_0^{(3)} = 0$, $\lambda_1^{(3)} = 9$, $\lambda_2^{(3)} = 5$, $\lambda_3^{(3)} = 13$, $\lambda_4^{(3)} = 18$, $\lambda_5^{(3)} = 23$.

Etapa 4. ($k+1$ pentru $k=3$). Se recalculează pentru toate arcele $(x_i, x_j) \in U$, diferențele $\lambda_j^{(3)} - \lambda_i^{(3)}$ şi se compară cu $\ell(x_i, x_j)$.

Vârful x_5:

$$\begin{cases} \lambda_5^{(3)} - \lambda_4^{(3)} = 5 = (x_4, x_5); \\ \lambda_5^{(3)} - \lambda_3^{(3)} = 10 = \ell(x_3, x_5); \end{cases}$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} \lambda_4^{(3)} - \lambda_3^{(3)} = 5 = \ell(x_3, x_4); \\ \lambda_4^{(3)} - \lambda_2^{(3)} = 13 > \ell(x_2, x_4) = 5; \\ \lambda_4^{(3)} - \lambda_1^{(3)} = 9 > \ell(x_1, x_4) = 6; \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\begin{cases} \lambda_3^{(3)} - \lambda_2^{(3)} = 8 > \ell(x_2, x_3) = 4; \\ \lambda_3^{(3)} - \lambda_1^{(3)} = 4 = \ell(x_1, x_3); \\ \lambda_3^{(3)} - \lambda_0^{(3)} = 13 = \ell(x_0, x_3); \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\left\{ \lambda_2^{(3)} - \lambda_0^{(3)} = 5 = \ell(x_0, x_2); \right.$$

Vârful x_1:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} = 4 = \ell(x_2, x_1); \\ \lambda_1^{(3)} - \lambda_0^{(3)} = 9 > \ell(x_0, x_1). \end{cases}$$

La sfârşitul acestei etape toate relațiile dintre $\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)}$ şi $\ell\left(x_i, x_j\right)$ sunt de tip „=" sau „>", deci nici unul dintre numerele $\lambda_i^{(3)}$ nu mai poate fi îmbunătățit. Rezultă că valorile:

$\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 9$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = 13$; $\lambda_4 = 18$; $\lambda_5 = 23$ sunt optime şi se poate trece la etapa de depistare a drumului optim de la x_0 şi x_5.

Determinarea drumului optim de la x_0 *la* x_5.

Dacă x_i este penultimul vârf al drumului optim, atunci: $\lambda_5 - \lambda_i = \ell\left(x_i, x_5\right)$ (relații de tip „="). Rezultă $i = 3$ sau $i = 4$. Fie x_3 penultimul vârf. Dacă x_j precede pe x_3, atunci: $\lambda_3 - \lambda_j = \ell\left(x_j, x_3\right)$. Rezultă $j = 0$ sau $j = 1$. Dacă $j = 0$, se obține drumul optim $\mu_1 = \left(x_0, x_3, x_5\right)$. Dacă $j = 1$ se determină succesiv vârfurile care-l preced pe x_1 şi se obține drumul optim: $\mu_2 = \left(x_0, x_2, x_1, x_3, x_5\right)$. Dacă penultimul vârf este luat x_4, atunci analog se determină toate vârfurile care-l preced pe x_4 şi se obțin drumurile optime: $\mu_3 = \left(x_0, x_3, x_4, x_5\right)$, $\mu_4 = \left(x_0, x_2, x_1, x_3, x_4, x_5\right)$.

Valoarea fiecăruia dintre drumurile determinate este maximă şi egală cu 23.

LECȚIA 8

3.7 Algoritmul Bellman-Kalaba pentru determinarea drumurilor de valoare minimă dintre două vârfuri ale unui graf

Definiția 3.7.1

Un graf se numeşte graf cu arce valorizate dacă este definit astfel: $G=\left(X,U,\ell\right)$, unde $X=\left\{x_0,x_1,...,x_n\right\}$ este mulțimea vârfurilor, $U=$mulțimea arcelor şi $\ell:U\to\mathbb{R}_+$ este o funcție reală, pozitivă, care asociază fiecărui arc un număr pozitiv numit valoarea sa. Funcția ℓ se poate prelungi pe mulțimea drumurilor din graf. În cele ce urmează se va considera că ℓ este definită pe mulțimea drumurilor.

Ne propunem să determinăm drumul de valoare minimă de la x_0 la x_n. Algoritmul lui Bellman-Kalaba ce va fi descris în continuare are la bază „principiul optimalității" formulat, la modul general , astfel: „orice subpolitică a unei politici optime este, de asemenea, o politică optimă". În cazul grafurilor formularea este, pentru situația determinării drumurilor minime, următoarea: „orice subdrum al unui drum optim este, de asemenea, un drum optim".

Fie
$$c_{ij}=\begin{cases}\ell\left(i,j\right), & \text{dacă } \left(x_i,x_j\right)\in U,\ i\neq j;\\ 0, & \text{dacă } i=j;\\ +\infty, & \text{dacă } \left(x_i,x_j\right)\notin U,\ i\neq j.\end{cases}\qquad \textbf{(3.7.1)}$$

Pentru a înțelege mai bine utilitatea introducerii acestei notații vom considera graful $G=\left(X,\tilde{U},\tilde{\ell}\right)$, în care există toate arcele posibile, cu excepția buclelor, iar aceste arce sunt valorizate astfel:

$$\tilde{\ell}\left(u\right)=\begin{cases}\ell\left(u\right) & \text{dacă } u\in U;\\ +\infty & \text{dacă } u\in\tilde{U}\setminus U.\end{cases}\qquad \textbf{(3.7.2)}$$

Prin urmare c_{ij} $\left(i\neq j\right)$ reprezintă valoarea arcului $\left(x_i,x_j\right)$ în $\tilde{G}$; orice drum în $\tilde{G}$ care nu există în *G* are valoarea $+\infty$, iar orice drum din *G* există şi în $\tilde{G}$ şi are aceeaşi valoare în ambele grafuri.

Aflarea unui drum de valoare minimă între două vârfuri în *G* este echivalentă cu aflarea drumului de valoare minimă între cele două vârfuri din $\tilde{G}$. Este preferabil să folosim graful $\tilde{G}$ deoarece în raționamente putem vorbi despre arcul $\left(x_i,x_j\right)$, oricare ar fi vârfurile distincte x_i şi x_j. Dacă un drum optim între două vârfuri va avea valoarea $+\infty$, atunci aceasta înseamnă că în graful *G* nu există nici un drum între cele două vârfuri.

Fazele şi etapele algoritmului:

Faza I – *declanşarea şi funcționarea algoritmului până la realizarea condiției de oprire*.

Etapa 0

Definim numerele $v_i^{(k)}$, $i=0,1,...,n-1$, $v_n^{(k)}=0$, ca fiind valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_n formate din $k+1$ arce.

Determinarea valorilor optime $v_i^{(k)}$ cuprinde *k* etape.

În această etapă se definesc $v_i^{(0)} = c_{in}$, $i = 0,1,...,n$; $v_n^{(0)} = 0$. Se construieşte matricea $c = \left(c_{ij}\right)$. $v_i^{(0)}$, $i = 0,1,...,n-1$, reprezintă valoarea drumului format dintr-un singur arc, de la x_i la x_n.

Etapa 1

În etapa următoare vom lua $v_i^{(1)} =$ *valoarea minimă* a drumurilor formate din *cel mult două arce* de la x_i la x_n, unde $i = 0,1,...,n-1$.

Pentru *i* fixat, drumurile de la x_i la x_n, formate din *cel mult două arce*, sunt următoarele:

$$\left(x_i, x_1, x_n\right), \left(x_i, x_2, x_n\right), ..., \left(x_i, x_{i-1}, x_n\right),\ \left(x_i, x_n\right), \left(x_i, x_{i+1}, x_n\right), ..., \left(x_i, x_{n-1}, x_n\right).$$

Valorile acestor drumuri sunt, respectiv următoarele:

$$\tilde{\ell}\left(x_i, x_1, x_n\right) = \tilde{\ell}\left(x_i, x_1\right) + \tilde{\ell}\left(x_1, x_n\right) = c_{i1} + v_1^{(0)};$$

$$\tilde{\ell}\left(x_i, x_2, x_n\right) = \tilde{\ell}\left(x_i, x_2\right) + \tilde{\ell}\left(x_2, x_n\right) = c_{i2} + v_2^{(0)};$$

....

$$\tilde{\ell}\left(x_i, x_n\right) = v_i^{(0)} = c_{in} = \tilde{\ell}\left(x_i, x_i, x_n\right) = c_{ii} + v_i^{(0)} = v_i^{(0)}, \left(c_{ii} = 0\right);$$

....

$$\ell\left(x_i, x_{n-1}, x_n\right) = \tilde{\ell}\left(x_i, x_{n-1}\right) + \tilde{\ell}\left(x_{n-1}, x_n\right) = c_{in-1} + v_{n-1}^{(0)}.$$

Valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_n, formate din *cel mult două arce* este:

$$v_i^{(1)} = \min_{j=0}^{n}\left(c_{ij} + v_j^{(0)}\right),\ v_n^{(1)} = 0,\ i = 0,1,...,n-1 \qquad \textbf{(3.7.3)}$$

Etapa 2

În etapa a doua vom lua $v_i^{(2)} =$ *valoarea minimă* a drumurilor de la x_i la x_n formate din *cel mult trei arce*, $i = 0,1,...,n-1$ şi $v_n^{(2)} = 0$.

Cel mai bun drum de la x_i la x_n format din cel mult trei arce şi care are drept al doilea vârf un anumit vârf x_j este format din arcul $\left(x_i, x_j\right)$ şi cel mai bun drum de la x_j la x_n format din cel mult două arce. Valoarea acestui drum este:

$$c_{ij} + v_j^{(1)}, \qquad \textbf{(3.7.4)}$$

astfel că pentru această etapă vom lua:

$$v_i^{(2)} = \min_{j=0}^{n}\left(c_{ij} + v_j^{(1)}\right),\ i = \overline{0, n-1} \text{ şi } v_n^{(2)} = 0. \qquad \textbf{(3.7.5)}$$

Să mai observăm că pentru $j = i$ expresia (3.7.4) ne dă valoarea celui mai bum drum de la x_i la x_n format din cel mult două arce: $c_{ii} + v_i^{(1)} = v_i^{(1)}$, $\left(c_{ii} = 0\right)$, iar pentru $j = n$ aceeaşi expresie, (3.7.4), ne dă valoarea drumului format dintr-un singur arc:

$$c_{in} + v_n^{(1)} = c_{in},\ \left(v_n^{(1)} = 0\right). \qquad \textbf{(3.7.6)}$$

Deci, putem afirma că cel mai bun drum de la x_i la x_n format din *cel mult trei arce* are valoarea

$v_i^{(2)} = \min\limits_{j=0}^{n}\left(c_{ij} + v_j^{(1)}\right)$, $i = 0,1,...,n-1$. Cum, în general, $c_{ij} \geq 0$, rezultă că:

$$v_i^{(2)} \leq v_i^{(1)},\ (\forall)\ i = 0,1,...,n-1. \qquad \textbf{(3.7.7)}$$

În continuare se procedează analog şi la etapa a *k*-a vom lua:

$$v_i^{(k)} = \min_{j=0}^{n}\left(c_{ij} + v_j^{(k-1)}\right),\ i = \overline{0,n-1} \text{ şi } v_n^{(k)} = 0. \qquad \textbf{(3.7.8)}$$

Printr-un raţionament similar se arată că $v_i^{(k)}$ reprezintă valoarea celui mai bun drum de la x_i la x_n, format din *cel mult* $k+1$ *arce* şi că, pentru orice *k* şi *i*,

$$v_i^{(k)} \leq v_i^{(k-1)} \qquad \textbf{(3.7.9)}$$

Condiţia de oprire a algoritmului

Dacă, într-o anumită etapă, pentru un anumit *i*, avem că $v_i^{(k)} < v_i^{(k-1)}$ aceasta înseamnă că există cel puţin un drum de la x_i la x_n format din exact $k+1$ arce care este mai bun (adică de valoare mai mică) decât orice drum de la x_i la x_n format din cel mult *k* arce. (Acest drum poate apare în etapa următoare, $k+1$).

Procedeul de calcul se va întrerupe la **prima etapă** *k* în care vom avea: $v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$, $(\forall)\ i = \overline{0,n-1}$.

În această etapă valoarea $v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$, pentru orice $i = \overline{0,n-1}$, reprezintă valoarea celui mai bun drum (de valoare minimă) de la x_i la x_n, deci $v_i^{(k)}$ sunt valorile optime, $(\forall)\ i = \overline{0,n-1}$.

Faza II – *determinarea drumului optim de la* x_0 *la* x_n.

După realizarea condiţiei de oprire a algoritmului (având ca stare iniţială cunoaşterea valorilor optime $v_i^{(k)}$, $i = \overline{0,n-1}$) se trece la determinarea drumului optim de la x_0 la x_n.

Presupunând că acest drum este $\mu = \left(x_0, x_i, x_j, ..., x_n\right)$, se determină succesiv indicii $i, j, ...$ astfel:

1. indicele *i* se determină din relaţia: $v_0 = c_{0i} + v_i$;

2. odată determinat i şi dacă $i \neq n$ se trece la determinarea vârfului următor x_j din relaţia: $v_i = c_{ij} + v_j$ etc.

În concluzie algoritmul Bellman-Kalaba pentru determinarea drumului de valoare minimă de la x_0 la x_n constă în:

Faza I – *declanşarea şi funcţionarea algoritmului până la realizarea condiţiei de oprire.*

a) se ia $v_i^{(0)} = c_{in}$, $i = \overline{0, n-1}$, $v_n^{(0)} = 0$ (Faza I, etapa 0);

b) pentru $k = 1, 2, \ldots$, se calculează $v_i^{(k)} = \min\limits_{j=1}^{n} \left(c_{ij} + v_j^{(k-1)} \right)$, $i = \overline{0, n}$ şi $v_n^{(k)} = 0$. (Faza I, etapele $1, 2, \ldots, k$);

c) dacă într-o etapă k se ajunge la $v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$, $(\forall)\, i = \overline{0, n}$, valorile $v_i = v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$ sunt valorile optime şi se trece la determinarea drumului optim.

Faza II – *determinarea drumului optim (de valoare minimă)de la x_0 la x_n.*

Aceasta se face ţinând cont că dacă x_i, x_j sunt vârfuri consecutive în această ordine ale drumului optim, atunci $v_i = c_{ij} + v_j$.

3.8 Exemple la algoritmul lui Bellman-Kalaba pentru determinarea drumurilor de valoare minimă dintre două vârfuri ale unui graf

Exemplul 3.8.1

Să se determine drumul de valoare minimă de la x_0 la x_6 în graful din figura următoare

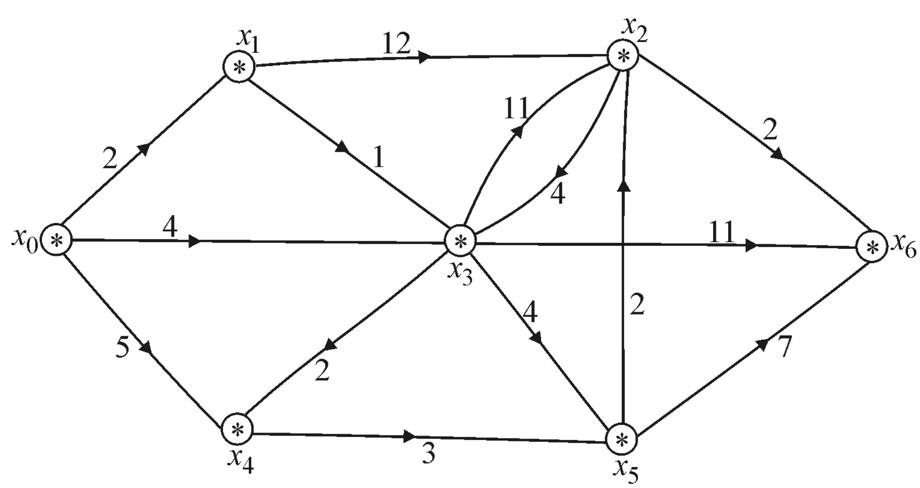


Fig. 3.8.1

Faza I – *declanşarea şi funcţionarea algoritmului până la realizarea condiţiei de oprire.*

Etapa 0; $k = 0$.

În această etapă se construieşte matricea $C=\left(c_{ij}\right)$, $i,j=0,1,...,6$ şi se definesc numerele $v_i^{(0)}=c_{i6}$, $i=0,1,...,5$, $v_6^{(0)}=0$, reprezentând valoarea drumului format dintr-un singur arc de la x_i, $i=0,1,...,5$, la x_6.

Matricea *C* este următoarea:

$$C=\begin{array}{ccccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 0 & 2 & \infty & 4 & 5 & \infty & \infty & x_0 \\ \infty & 0 & 12 & 1 & \infty & \infty & \infty & x_1 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty & 2 & x_2 \\ \infty & \infty & 11 & 0 & 2 & 4 & 11 & x_3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & x_4 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 7 & x_5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & x_6 \end{array}$$

Se observă că elementele diagonalei principale ale matricei *C* sunt nule ($c_{ii}=0$, conform cu relația (3.7.1)). Valorile $v_i^{(0)}$, $i=0,1,2,...,6$, se află pe ultima coloană a matricei *C*.

Etapa 1; $k=1$.

În această etapă se calculează valorile $v_i^{(1)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij}+v_j^{(0)}\right)$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(1)}=0$ (conform relațiilor 3.7.3), reprezentând valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_6, formate din cel mult două arce. Avem:

Pentru $i=0$:

$$v_0^{(1)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{0j}+v_j^{(0)}\right)=\min\left(0+\infty;2+\infty;\infty+2;4+11;5+\infty;\infty+7;\infty+0\right)=15;$$

Practic, se adună elementele corespunzătoare din linia lui x_0 cu elementele corespunzătoare din coloana lui x_6 din matricea *C*, după care se determină cea mai mică valoare din vectorul rezultat.

Pentru $i=1$:

$$v_1^{(1)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+v_j^{(0)}\right)=\min\left(\infty+\infty;0+\infty;12+2;1+11;\infty+\infty;\infty+7;\infty+0\right)=12=$$

$$=\min_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+c_{j6}\right)\Leftrightarrow\min\left(\text{linia lui } x_1+\text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=2$:

$$v_2^{(1)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+v_j^{(0)}\right)=\min\left(\infty+\infty;\infty+\infty;0+2;4+11;\infty+\infty;\infty+7;2+0\right)=2=$$

$$=\min_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+c_{j6}\right)\Leftrightarrow\min\left(\text{linia lui } x_2+\text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=3$:

$$v_3^{(1)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+v_j^{(0)}\right)=\min\left(\infty+\infty;\infty+\infty;11+2;0+11;2+\infty;4+7;11+0\right)=11=$$

$$=\min_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+c_{j6}\right)\Leftrightarrow\min\left(\text{linia lui } x_3+\text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=4$:

$$v_4^{(1)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+v_j^{(0)}\right)=\min\left(\infty+\infty;\infty+\infty;\infty+2;\infty+11;0+\infty;3+7;\infty+0\right)=10=$$

$$=\min_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+c_{j6}\right)\Leftrightarrow\min\left(\text{linia lui } x_4+\text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=5$:

$$v_5^{(1)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(0)}\right)=\min\left(\infty+\infty;\infty+\infty;2+2;\infty+11;\infty+\infty;0+7;7+0\right)=4=$$

$$=\min_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+c_{j6}\right)\Leftrightarrow\min\left(\text{linia lui } x_5+\text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=6$: $v_6^{(1)}=0$.

La sfârşitul etapei 1 rezultă vectorul

$$V^{(1)}=\left(v_0^{(1)},v_1^{(1)},v_2^{(1)},\dots,v_6^{(1)}\right)=\left(15,12,2,11,10,4,0\right).$$

Comparând cu $V^{(0)}=\left(\infty,\infty,2,11,\infty,7,0\right)$ (comparaţia se face între componentele de acelaşi rang) se constată că există indici *i* pentru care $v_i^{(1)}<v_i^{(0)}$ şi anume $i\in\{0,1,4,5\}$, deci algoritmul continuă.

Etapa 2; $k=2$.

În această etapă se calculează valorile $v_i^{(2)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{ij}+v_j^{(1)}\right)$, $i=0,1,2,\dots,5$ şi $v_6^{(0)}=0$ (conform relaţiilor (3.7.5)), reprezentând valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_6 formate din cel mult trei arce. Conform relaţiilor 3.7.5 şi a observaţiilor din etapa 1, rezultă că pentru fiecare $i=0,1,2,\dots,5$ se va aduna linia corespunzătoare vârfului x_i din matricea *C* cu linia vectorului $V^{(1)}$ obţinut la sfârşitul etapei 1, element cu element şi apoi se va determina cea mai mică valoare din fiecare vector astfel obţinut. Se obţine:

$i=0$: $v_0^{(2)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{0j}+v_j^{(1)}\right)=14<v_0^{(1)}=15$;

$i=1$: $v_1^{(2)}=\min_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+v_j^{(1)}\right)=12=v_1^{(1)}$;

$i=2:\ v_2^{(2)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+v_j^{(1)}\right)=2=v_2^{(1)}$;

$i=3:\ v_3^{(2)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+v_j^{(1)}\right)=8<v_3^{(1)}=11$;

$i=4:\ v_4^{(2)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+v_j^{(1)}\right)=7<v_4^{(1)}=10$;

$i=5:\ v_5^{(2)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(1)}\right)=4=v_5^{(1)}$;

$i=6:\ v_6^{(2)}=0$.

Se obține vectorul $V^{(2)}=\left(14,12,2,8,7,4,0\right)$.

Comparând cu vectorul $V^{(1)}$, obținut la sfârșitul etapei 1, se constată că există indici i pentru care $v_i^{(2)}<v_i^{(1)}$ și anume $i\in\{0,3,4\}$, deci valorile $v_i^{(2)}$ nu sunt optime, astfel că algoritmul se continuă cu etapa următoare.

Etapa 3; $k=3$.

Se calculează valorile $v_i^{(3)}$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(3)}=0$ utilizând relațiile (3.7.8), pentru $k=3:\ v_i^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij}+v_j^{(2)}\right)$, $i=0,1,2,...,5$. Se obține:

$i=0:\ v_0^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{0j}+v_j^{(2)}\right)=12<v_0^{(2)}=14$;

$i=1:\ v_1^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+v_j^{(2)}\right)=9<v_1^{(2)}=12$;

$i=2:\ v_2^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+v_j^{(2)}\right)=2=v_2^{(2)}$;

$i=3:\ v_3^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+v_j^{(2)}\right)=8=v_3^{(2)}$;

$i=4:\ v_4^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+v_j^{(2)}\right)=7=v_4^{(2)}$;

$i=5:\ v_5^{(3)}=\min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(2)}\right)=4=v_5^{(2)}$;

$i=6:\ v_6^{(3)}=0$.

Se obține vectorul $V^{(3)}=\left(12,9,2,8,7,4,0\right)$.

În urma comparației (pe componente) cu $V^{(2)}$ se constată că există indicii $i\in\{0,1\}$ pentru care $v_i^{(3)}<v_i^{(2)}$, deci valorile $v_i^{(3)}$ nu sunt optime și algoritmul continuă.

Etapa 4; $k=4$.

Se calculează valorile $v_i^{(4)}$, $i = 0,1,2,...,5$, $v_6^{(4)} = 0$ utilizând relațiile 3.7.8, pentru $k = 4$: $v_i^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij} + v_j^{(3)}\right)$, $i = 0,1,2,...,5$. Se obține:

$i = 0$: $v_0^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(3)}\right) = 11 < v_0^{(3)} = 12$;

$i = 1$: $v_1^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(3)}\right) = 9 = v_1^{(3)}$;

$i = 2$: $v_2^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(3)}\right) = 2 = v_2^{(3)}$;

$i = 3$: $v_3^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(3)}\right) = 8 = v_3^{(3)}$;

$i = 4$: $v_4^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(3)}\right) = 7 = v_4^{(3)}$;

$i = 5$: $v_5^{(4)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + v_j^{(3)}\right) = 4 = v_5^{(3)}$;

$i = 6$: $v_6^{(4)} = 0$.

Se obține vectorul $V^{(4)} = \left(11,9,2,8,7,4,0\right)$.

Există indicele $i = 0$ astfel încât $v_0^{(4)} < v_0^{(3)}$, deci se trece la etapa următoare.

Etapa 5; $k = 5$.

Se calculează valorile $v_i^{(5)}$, $i = 0,1,2,...,5$, $v_6^{(5)} = 0$ utilizând relațiile (3.7.8), pentru $k = 5$: $v_i^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij} + v_j^{(4)}\right)$, $i = 0,1,2,...,5$. Se obține:

$i = 0$: $v_0^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(4)}\right) = 11 = v_0^{(4)}$;

$i = 1$: $v_1^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(4)}\right) = 9 = v_1^{(4)}$;

$i = 2$: $v_2^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(4)}\right) = 2 = v_2^{(4)}$;

$i = 3$: $v_3^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(4)}\right) = 8 = v_3^{(4)}$;

$i = 4$: $v_4^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(4)}\right) = 7 = v_4^{(4)}$;

$i = 5$: $v_5^{(5)} = \min\limits_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + v_j^{(4)}\right) = 4 = v_5^{(4)}$;

$i = 6$: $v_6^{(5)} = 0$.

Se obține vectorul $V^{(5)} = (11,9,2,8,7,4,0)$ și se constată că $v_i^{(5)} = v_i^{(4)}$, pentru orice $i = 0,1,2,...,6$, deci s-a realizat condiția de oprire a algoritmului. Prin urmare $v_i = v_i^{(5)} = v_i^{(4)}$, $(\forall)$ $i = 0,1,...,6$, reprezintă valoarea optimă a drumurilor de la x_i la x_6, formate din cel mult 6 arce.

Faza a II-a – *determinarea drumului optim de la x_0 la x_6.*

Determinarea drumului optim se face în sensul de la x_0 către x_6. Valoarea minimă a drumului optim de la x_0 la x_6 este $v_0 = v_0^{(5)} = 11$, deci valoarea primei componente a vectorului $V^{(5)}$ obținut la sfârșitul ultimei etape din faza I.

Rescriem în detaliu (pe componente) relațiile cu ajutorul cărora s-au obținut valorile optime $v_i = v_i^{(5)}$, $i = 0,1,2,...,6$, în ultima etapă din faza I.

$i = 0$:

$$v_0^{(5)} = \min_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(4)}\right) = \min\left(0+11; 2+9; \infty+2; 4+8; 5+7; \infty+4; \infty+0\right) = 11;$$

minimul se obține pentru $j \in \{0,1\}$.

$i = 1$:

$$v_1^{(5)} = \min_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(4)}\right) = \min\left(\infty+11; 0+9; 12+2; 1+8; \infty+7; \infty+4; \infty+0\right) = 9;$$

minimul se obține pentru $j \in \{1,3\}$.

$i = 2$:

$$v_2^{(5)} = \min_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(4)}\right) = \min\left(\infty+11; \infty+9; 0+2; 4+8; \infty+7; \infty+4; 2+0\right) = 2;$$

minimul se obține pentru $j \in \{2,6\}$.

$i = 3$:

$$v_3^{(5)} = \min_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(4)}\right) = \min\left(\infty+11; \infty+9; 11+2; 0+8; 2+7; 4+4; 11+0\right) = 8;$$

minimul se obține pentru $j \in \{3,5\}$.

$i = 4$:

$$v_4^{(5)} = \min_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(4)}\right) = \min\left(\infty+11; \infty+9; \infty+2; \infty+8; 0+7; 3+4; \infty+0\right) = 7;$$

minimul se obține pentru $j \in \{4,5\}$.

$i = 5$:

$$v_5^{(5)} = \min_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + v_j^{(4)}\right) = \min\left(\infty+11; \infty+9; 2+2; \infty+8; \infty+7; 0+4; 7+0\right) = 4;$$

minimul se obține pentru $j \in \{2,5\}$.

Dacă x_j este primul vârf care urmează după x_0 pe drumul optim, atunci se caută în relația scrisă pentru $i=0$ indicele *j* pentru care:

$$v_0 = c_{0j} + v_j = 11.$$

Se obține $j \in \{0,1\}$. Cum x_0 este primul vârf al drumului optim, rezultă $j=1$, deci x_1 este al doilea vârf al drumului optim: $\mu = \{x_0, x_1, ..., x_6\}$.

Să mai observăm că $\ell(x_0, x_1) = 2$ şi evident, $v_1 = 9 = v_0 - \ell(x_0, x_1) = 11 - 2$, reprezintă valoarea optimă a subdrumului de la x_1 la x_6 pe drumul optim.

Fie acum x_j vârful care urmează după x_1 pe drumul optim. Se va căuta în relația scrisă pentru $i=1$ (corespunzătoare vârfului anterior, x_1) indicele *j* pentru care:

$$v_1 = c_{1j} + v_j = 9.$$

Se obține $j \in \{1,3\}$. Cum x_1 este ultimul vârf al drumului optim până în acest moment, rezultă $j=3$, deci x_3 este al treilea vârf pe drumul optim: $\mu = \{x_0, x_1, x_3, ..., x_6\}$.

De asemenea, $\ell(x_1, x_3) = 1$ şi $v_3 = v_1 - \ell(x_1, x_3) = 8$, reprezintă valoarea optimă a subdrumului de la x_3 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_3 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i=3$ indicele *j* pentru care:

$$v_3 = c_{3j} + v_j = 8.$$

Se obține $j \in \{3,5\}$. Cum x_3 este ultimul vârf al drumului optim până în acest moment, rezultă $j=5$, deci x_5 urmează după x_3 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, x_1, x_3, x_5, ..., x_6\}$.

Analog $\ell(x_3, x_5) = 4$ şi $v_5 = v_3 - \ell(x_3, x_5) = 4$, reprezintă valoarea optimă a subdrumului de la x_5 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_5 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i=5$ indicele *j* pentru care:

$$v_5 = c_{5j} + v_j = 4.$$

Se obține $j \in \{2,5\}$. Cum x_5 se află deja pe drumul optim, rezultă $j=2$, deci x_2 urmează după x_5 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, x_1, x_3, x_5, x_2, ..., x_6\}$.

Avem şi $\ell(x_5, x_2) = 2$, iar $v_2 = v_5 - \ell(x_5, x_2) = 2$, reprezintă valoarea optimă a subdrumului de la x_2 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_2 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i=2$ indicele *j* pentru care:

$$v_2 = c_{2j} + v_j = 2.$$

Se obține $j \in \{2,6\}$ şi cum x_2 se află deja pe drumul optim, rezultă $j=6$. Dar x_6 este ultimul vârf al drumului optim, astfel că în acest moment s-a încheiat şi faza a II-a a algoritmului, drumul optim obținut este $\mu=\{x_0,x_1,x_3,x_5,x_2,x_6\}$, iar $v_2=2$ reprezintă valoarea ultimului arc al acestui drum: $v_2=2=\ell(x_2,x_6)$.

3.10 Algoritmul lui Bellman-Kalaba pentru determinarea drumurilor de valoare maximă dintre două vârfuri ale unui graf fără circuite. Exemple

Algoritmul lui Bellman-Kalaba poate fi utilizat, întocmai ca şi algoritmul lui Ford, şi pentru determinarea drumului (drumurilor) de valoare maximă între două vârfuri ale unui graf fără circuite.

Modificările de esență ale algoritmului lui Bellman-Kalaba pentru *determinarea drumului (drumurilor) de valoare minimă* între două vârfuri ale unui graf care permit transformarea sa în algoritmul pentru *determinarea drumului (drumurilor) de valoare maximă* între două vârfuri ale unui graf fără circuite sunt următoarele:

– în matricea $C=(c_{ij})$, $i,j=0,1,...,n$ a valorilor drumurilor formate dintr-un singur arc de la vârful x_i, $i=0,1,...,n-1$ până la vârful x_j, $j=0,1,...,n$ se va lua valoarea $-\infty$ (în loc de $+\infty$), dacă arcul $(x_i,x_j)\notin U$, $i\neq j$;

– valorile $v_j^{(k)}$, $i,j=0,1,...,n$, se vor determina schimbând în relația (3.7.8) simbolul **min** cu simbolul **max**.

Dacă $G=(X,U,\ell)$, $X=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ este un graf cu arce valorizate şi fără circuite (aceasta se poate stabili uşor cu ajutorul criteriului rezultat din teorema 2.2.12 din capitolul 2), atunci algoritmul lui Bellman-Kalaba pentru determinarea drumului (drumurilor) de valoare maximă dintre vârfurile x_0 şi x_n necesită parcurgerea următoarelor faze şi etape:

Faza I – *determinarea şi funcționarea algoritmului până la realizarea condiției de oprire*.

La rândul său, faza I cuprinde mai multe etape.

Etapa 0

Se construieşte matricea $C=(c_{ij})$, $i,j=0,1,...,n$, conform relațiilor:

$$c_{ij}=\begin{cases}\ell(x_i,x_j), & \text{dacă } (x_i,x_j)\in U,\ i\neq j;\\ 0 & \text{dacă } i\neq j;\\ -\infty & \text{dacă } (x_i,x_j)\notin U,\ i\neq j.\end{cases} \qquad \textbf{(3.10.1)}$$

Tot în etapa 0 se definesc numerele v_i^0, $i=0,1,...,n-1$, reprezentând valoarea maximă a drumurilor de la x_i, $i=0,1,...,n-1$, până la x_n, formate dintr-un singur arc. Aceste numere se află pe ultima coloană a matricei *C*, respectiv pe coloana lui x_n.

Etapa *k*; ($k\geq 1$).

În etapa *k* se calculează numerele $v_i^{(k)}$, $i=0,1,...,n-1$, $v_n^{(k)}=0$, reprezentând valoarea maximă a drumului de la x_i la x_n format din $k+1$ arce, cu relațiile:

$$v_i^{(k)} = \max_{j=0}^{n}\left(c_{ij} + v_j^{(k-1)}\right),\ i = 0,1,...,n-1,\ v_n^{(k)} = 0. \qquad \textbf{(3.10.2)}$$

Dacă la sfârşitul etapei *k* există indici *i* pentru care $v_i^{(k)} > v_i^{(k-1)}$, aceasta înseamnă că valorile $v_i^{(k)}$ nu sunt optime şi că există cel puțin un drum de la x_i la x_n format din $k+1$ arce mai bun (adică de valoare mai mare) decât orice drum de la x_i la x_n format din cel mult *k* arce; acest drum poate apare în etapa următoare, $k+1$.

Algoritmul se continuă până la *prima etapă k* în care se va obține:

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)},\ (\forall)\ i = 0,1,...,n. \qquad \textbf{(3.10.3)}$$

Valorile $v_i = v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$, $i = 0,1,...,n$ obținute la sfârşitul acestei etape sunt valorile optime şi reprezintă, pentru fiecare $i = 0,1,...,n$, valoarea maximă a drumului (drumurilor) de la x_i la x_n. Deci $v_0 = v_0^{(k)}$ este valoarea maximă a drumului optim de la x_0 la x_n.

Relațiile (3.10.3) reprezintă, în ansamblul lor, condiția de oprire a algoritmului în faza I.

Faza II – *determinarea drumului (drumurilor) optim (de valoare maximă) de la* x_0 *la* x_n.

Determinarea drumului optim se face în sensul de la x_0 către x_n, astfel:

– dacă x_j este primul vârf care succede lui x_0 pe drumul optim, atunci se caută în relația (3.10.2) din ultima etapă, scrisă pentru $i = 0$, indicele *j* pentru care:

$$v_0 = c_{0j} + v_j. \qquad \textbf{(3.10.4)}$$

– dacă se cunoaşte un vârf x_m al drumului optim şi $x_m \neq x_n$ şi dacă x_j este vârful care succede lui x_m pe drumul optim, atunci se caută în relația (3.10.2) din ultima etapă a fazei I, scrisă pentru $i = m$, indicele *j* pentru care

$$v_m = c_{mj} + v_j. \qquad \textbf{(3.10.5)}$$

– algoritmul continuă până când ultimul vârf determinat al drumului optim este însuşi x_n;

– dacă există mai mulți indici *j* pentru care are loc relația (3.10.5) şi dacă vârfurile care corespund acestor indici nu au fost depistate până în acest moment ca aparținând drumului optim, rezultă că există mai multe drumuri optime, având aceeaşi valoare maximă, respectiv $v_0^{(k)}$, iar vârful anterior lui x_j este vârful unde aceste drumuri se ramifică.

Exemplul 3.10.1

Să se determine drumul de valoare maximă de la x_0 la x_6 în graful din figura următoare:

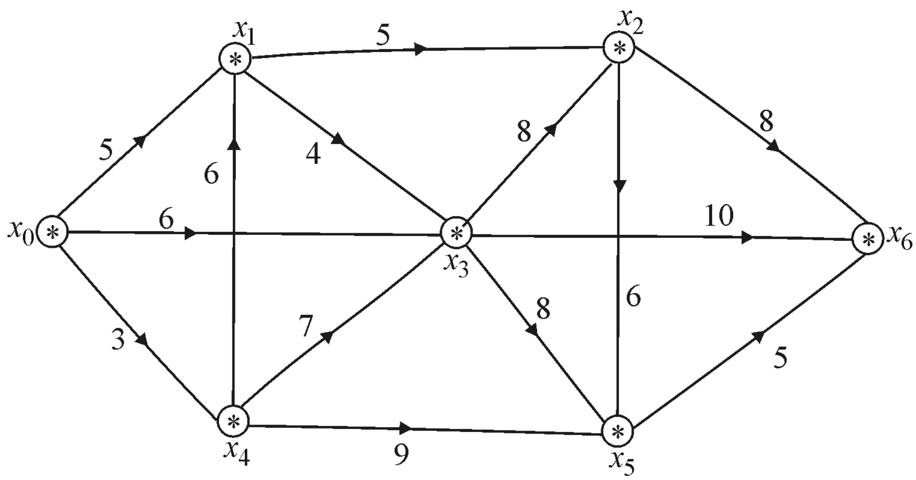


Fig. 3.10.1

Faza I

Etapa 0; $k = 0$.

Matricea $C = \left(c_{ij}\right)$, $i, j = 0,1,...,6$ se construieşte cu ajutorul relaţiilor (3.10.1) şi este următoarea:

$$C = \begin{array}{ccccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 0 & 5 & -\infty & 6 & 3 & -\infty & -\infty & x_0 \\ -\infty & 0 & 5 & 4 & -\infty & -\infty & -\infty & x_1 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 6 & 8 & x_2 \\ -\infty & -\infty & 8 & 0 & -\infty & 8 & 10 & x_3 \\ -\infty & 6 & -\infty & 7 & 0 & 9 & -\infty & x_4 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & x_5 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & x_6 \end{array}$$

Numerele $v_i^{(0)}$, $i = 0,1,...,6$ se află pe ultima coloană a matricei *C*;

$$V^{(0)} = \left(v_0^{(0)}, v_1^{(0)}, ..., v_6^{(0)}\right) = \left(-\infty, -\infty, 8, 10, -\infty, 5, 0\right).$$

Etapa 1; $k = 1$.

Se calculează valorile $v_i^1 = \max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij} + v_j^{(0)}\right)$, $i = 0,1,...,5$, $v_6^{(1)} = 0$, conform relaţiilor (3.10.2) pentru $k = 1$:

Pentru $i = 0$:

$$v_0^{(1)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(0)}\right) = \max\left(0-\infty; 5-\infty; -\infty+8; 6+10; 3-\infty; -\infty+5; -\infty+0\right) =$$

$$= 16 = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + c_{j6}\right) \Leftrightarrow \max\left(\text{linia lui } x_0 + \text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=1$:

$$v_1^{(1)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(0)}\right) = \max\left(-\infty-\infty; 0-\infty; 5+8; 4+10; -\infty-\infty; -\infty+5; -\infty+0\right) =$$

$$= 14 = \max_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + c_{j6}\right) \Leftrightarrow \max\left(\text{linia lui } x_1 + \text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=2$:

$$v_2^{(1)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(0)}\right) = \max\left(-\infty-\infty; -\infty-\infty; 0+8; -\infty+10; -\infty-\infty; 6+5; 8+0\right) =$$

$$= 11 = \max_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + c_{j6}\right) \Leftrightarrow \max\left(\text{linia lui } x_2 + \text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=3$:

$$v_3^{(1)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(0)}\right) = \max\left(-\infty-\infty; -\infty-\infty; 8+8; 0+10; -\infty-\infty; 8+5; 10+0\right) =$$

$$= 16 = \max_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + c_{j6}\right) \Leftrightarrow \max\left(\text{linia lui } x_3 + \text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=4$:

$$v_4^{(1)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(0)}\right) = \max\left(-\infty-\infty; 6-\infty; -\infty+8; 7+10; 0-\infty; 9+5; -\infty+0\right) =$$

$$= 17 = \max_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + c_{j6}\right) \Leftrightarrow \max\left(\text{linia lui } x_4 + \text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=5$:

$$v_5^{(1)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + v_j^{(0)}\right) = \max\left(-\infty-\infty; -\infty-\infty; -\infty+8; -\infty+10; -\infty-\infty; 0+5; 5+0\right) =$$

$$= 5 = \max_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + c_{j6}\right) \Leftrightarrow \max\left(\text{linia lui } x_5 + \text{coloana lui } x_6\right).$$

Pentru $i=6$: $v_6^{(1)} = 0$.

La sfârşitul etapei 1 rezultă vectorul

$$V^{(1)} = \left(v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, \ldots, v_6^{(1)}\right) = \left(16, 14, 11, 16, 17, 5, 0\right).$$

Comparând cu $V^{(0)} = \left(-\infty, -\infty, 8, 10, -\infty, 5, 0\right)$ (comparația se face între componentele de aceleaşi rang) se constată că există indici i pentru care $v_i^{(1)} > v_i^{(0)}$ şi anume $i \in \{0,1,2,3,4\}$, deci algoritmul continuă.

Etapa 2; $k = 2$.

Se calculează valorile $v_i^{(2)} = \max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij} + v_j^{(1)}\right)$, $i = 0,1,...,5$, $v_6^{(0)} = 0$, reprezentând valoarea maximă a drumurilor de la x_i la x_6 formate din cel mult trei arce, pentru fiecare $i = 0,1,2,...,5$. Se obține:

$$i = 0:\ v_0^{(2)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(1)}\right) = 22 > v_0^{(1)} = 16;$$

$$i = 1:\ v_1^{(2)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(1)}\right) = 20 > v_1^{(1)} = 14;$$

$$i = 2:\ v_2^{(2)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(1)}\right) = 11 = v_2^{(1)};$$

$$i = 3:\ v_3^{(2)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(1)}\right) = 19 > v_3^{(1)} = 16;$$

$$i = 4:\ v_4^{(2)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(1)}\right) = 23 > v_4^{(1)} = 17;$$

$$i = 5:\ v_5^{(2)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + v_j^{(1)}\right) = 5 = v_5^{(1)};$$

$$i = 6:\ v_6^{(2)} = 0.$$

Se obține vectorul $V^{(2)} = \left(22, 20, 11, 19, 23, 5, 0\right)$. Comparându-l, pe componente, cu vectorul $V^{(1)}$ obținut la sfârșitul etapei 1, se constată că există indici i pentru care $v_i^{(2)} > v_i^{(1)}$ şi anume $i \in \{0,1,3,4\}$, deci valorile $v_i^{(2)}$ nu sunt optime.

Etapa 3; $k = 3$.

Se calculează valorile $v_i^{(3)}$, $i = 0,1,2,...,5$, $v_6^{(3)} = 0$, utilizând relațiile (3.10.2) pentru $k = 3$: $v_i^{(3)} = \max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij} + v_j^{(2)}\right)$, $i = 0,1,2,...,5$, $v_6^{(3)} = 0$. Se obține:

$$i = 0:\ v_0^{(3)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(2)}\right) = 26 > v_0^{(2)} = 22;$$

$$i = 1:\ v_1^{(3)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(2)}\right) = 23 > v_1^{(2)} = 20;$$

$$i = 2:\ v_2^{(3)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(2)}\right) = 11 = v_2^{(2)};$$

$$i = 3:\ v_3^{(3)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(2)}\right) = 19 = v_3^{(2)};$$

$$i = 4:\ v_4^{(3)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(2)}\right) = 26 > v_4^{(2)} = 23;$$

$i=5:\ v_5^{(3)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(2)}\right) = 5 = v_5^{(2)}$;

$i=6:\ v_6^{(3)} = 0$.

Se obține vectorul $V^{(3)} = (26,23,11,19,26,5,0)$. Comparându-l, pe componente, cu $V^{(2)}$ se găsesc indicii $i \in \{0,1,4\}$ pentru care $v_i^{(3)} > v_i^{(2)}$, deci valorile $v_i^{(3)}$ nu sunt optime şi algoritmul continuă.

Etapa 4; $k=4$.

Se calculează valorile $v_i^{(4)}$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(3)}=0$, utilizând relațiile (3.10.2) pentru $k=4$: $v_i^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{ij}+v_j^{(4)}\right)$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(4)}=0$. Se obține:

$i=0:\ v_0^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j}+v_j^{(3)}\right) = 29 > v_0^{(3)} = 26$;

$i=1:\ v_1^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+v_j^{(3)}\right) = 23 = v_1^{(3)}$;

$i=2:\ v_2^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+v_j^{(3)}\right) = 11 = v_2^{(3)}$;

$i=3:\ v_3^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+v_j^{(3)}\right) = 19 = v_3^{(3)}$;

$i=4:\ v_4^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+v_j^{(3)}\right) = 29 > v_4^{(3)} = 26$;

$i=5:\ v_5^{(4)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(4)}\right) = 5 = v_5^{(3)}$;

$i=6:\ v_6^{(4)} = 0$.

Se obține vectorul $V^{(4)} = (29,23,11,19,29,5,0)$. Există indicii $i \in \{0,4\}$ pentru care $v_i^{(4)} > v_i^{(3)}$, deci se trece la etapa următoare.

Etapa 5; $k=5$.

Se calculează valorile $v_i^{(5)}$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(5)}=0$, cu relațiile (3.10.2) pentru $k=5$: $v_i^{(5)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{ij}+v_j^{(4)}\right)$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(5)}=0$. Se obține:

$i=0:\ v_0^{(5)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j}+v_j^{(4)}\right) = 32 > v_0^{(4)} = 29$;

$i=1:\ v_1^{(5)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+v_j^{(4)}\right)=23=v_1^{(4)};$

$i=2:\ v_2^{(5)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+v_j^{(4)}\right)=11=v_2^{(4)};$

$i=3:\ v_3^{(5)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+v_j^{(4)}\right)=19=v_3^{(4)};$

$i=4:\ v_4^{(5)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+v_j^{(4)}\right)=29=v_4^{(4)};$

$i=5:\ v_5^{(5)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(4)}\right)=5=v_5^{(4)};$

$i=6:\ v_6^{(5)}=0.$

Se obține vectorul $V^{(5)}=\left(32,23,11,19,29,5,0\right)$. Mai există un singur indice, $i=0$, pentru care $v_i^{(5)}>v_i^{(4)}$, deci se trece la etapa următoare.

Etapa 6; $k=6$.

Se calculează valorile $v_i^{(6)}$, $i=0,1,2,...,5$, $v_6^{(6)}=0$, cu relațiile (3.10.2) pentru $k=6$: $v_i^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{ij}+v_j^{(5)}\right)$, $i=0,1,2,...,5$ și $v_6^{(6)}=0$. Se obține:

$i=0:\ v_0^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{0j}+v_j^{(5)}\right)=32=v_0^{(5)};$

$i=1:\ v_1^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{1j}+v_j^{(5)}\right)=23=v_1^{(5)};$

$i=2:\ v_2^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{2j}+v_j^{(5)}\right)=11=v_2^{(5)};$

$i=3:\ v_3^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{3j}+v_j^{(5)}\right)=19=v_3^{(5)};$

$i=4:\ v_4^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{4j}+v_j^{(5)}\right)=29=v_4^{(5)};$

$i=5:\ v_5^{(6)}=\max\limits_{j=0}^{6}\left(c_{5j}+v_j^{(5)}\right)=5=v_5^{(5)};$

$i=6:\ v_6^{(6)}=0.$

Se obține vectorul $V^{(6)}=\left(32,23,11,19,29,5,0\right)$ și întrucât $v_i^{(6)}=v_i^{(5)}$, $\left(\forall\right)\ i=0,1.2,...,6$, rezultă că $v_i=v_i^{(6)}$, $i=0,1,2,...,6$ reprezintă valoarea drumului optim (de valoare maximă) de la x_i la x_6, format din cel mult 7 arce. S-a realizat, deci condiția de oprire a algoritmului, respectiv relațiile (3.10.3), astfel că se poate trece la determinarea drumului optim de la x_0 la x_6.

Faza a II-a

Determinarea drumului optim se face în sensul de la x_0 către x_6. Valoarea maximă a drumului optim de la x_0 la x_6 este $v_0 = v_0^{(6)} = 32$, deci valoarea primei componente a vectorului $V^{(6)}$ obținut la sfârşitul ultimei etape din faza I.

Se rescriu în detaliu, pe componente şi pentru fiecare $i = 0,1,\ldots,6$, relațiile cu ajutorul cărora s-au obținut valorile optime $v_i = v_i^{(6)}$, în ultima etapă din faza I.

$i = 0$:

$$v_0 = v_0^{(6)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{0j} + v_j^{(5)}\right) =$$

$$= \max\left(0+32; 5+23; -\infty+11; 19+6; 29+3; -\infty+5; -\infty+0\right) = 32;$$

maximul se obține pentru $j \in \{0,4\}$.

$i = 1$:

$$v_1 = v_1^{(6)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{1j} + v_j^{(5)}\right) =$$

$$= \max\left(-\infty+32; 0+23; 5+11; 4+19; -\infty+29; -\infty+5; -\infty+0\right) = 23;$$

maximul se obține pentru $j \in \{1,3\}$.

$i = 2$:

$$v_2 = v_2^{(6)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{2j} + v_j^{(5)}\right) =$$

$$= \max\left(-\infty+32; -\infty+23; 0+11; -\infty+19; -\infty+29; 6+5; 8+0\right) = 11;$$

maximul se obține pentru $j \in \{2,5\}$.

$i = 3$:

$$v_3 = v_3^{(6)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{3j} + v_j^{(5)}\right) =$$

$$= \max\left(-\infty+32; -\infty+23; 8+11; 0+19; -\infty+29; 8+5; 10+0\right) = 19;$$

maximul se realizează pentru $j \in \{2,3\}$.

$i = 4$:

$$v_4 = v_4^{(6)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{4j} + v_j^{(5)}\right) =$$

$$= \max\left(-\infty+32; 6+23; -\infty+11; 7+19; 0+29; 9+5; -\infty+0\right) = 29;$$

maximul se realizează pentru $j \in \{1,4\}$.

$i = 5$:

$$v_5 = v_5^{(6)} = \max_{j=0}^{6}\left(c_{5j} + v_j^{(5)}\right) =$$

$$= \max\left(-\infty + 32; -\infty + 23; -\infty + 11; -\infty + 19; -\infty + 29; 0 + 5; 5 + 0\right) = 5;$$

maximul se realizează pentru $j \in \{5,6\}$.

$i = 6: \quad v_6 = v_6^{(6)} = 0$.

Presupunem că x_j este primul vârf care urmează după x_0 pe drumul optim de la x_0 la x_6: $\mu = \{x_0, x_j, \ldots, x_6\}$. Se caută în relația scrisă pentru $i = 0$ indicele j pentru care: $v_0 = c_{0j} + v_j = 32$.

Se obține $j \in \{0,4\}$. Cum x_0 este primul vârf al drumului optim, rezultă $j = 4$, deci x_4 este al doilea vârf al drumului optim: $\mu = \{x_0, x_4, \ldots, x_6\}$.

Se mai observă că $\ell(x_0, x_4) = 3$ și evident, $v_4 = v_0 - \ell(x_0, x_4) = 29$, reprezintă valoarea maximă a subdrumului de la x_4 la x_6 pe drumul optim.

Fie acum x_j vârful care urmează după x_4 pe drumul optim. Se va căuta în relația scrisă pentru $i = 4$ indicele j pentru care: $v_4 = c_{4j} + v_j = 29$.

Se obține $j = \{1,4\}$. Cum x_4 se află deja pe drumul optim, rezultă $j = 1$, deci x_1 este al treilea vârf al drumului optim: $\mu = \{x_0, x_4, x_1, \ldots, x_6\}$.

De asemenea, $\ell(x_4, x_1) = 6$ și $v_1 = v_4 - \ell(x_4, x_1) = 23$ reprezintă valoarea maximă a subdrumului de la x_1 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_1 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i = 1$ indicele j pentru care: $v_1 = c_{1j} + v_j = 23$.

Se obține $j = \{1,3\}$. Cum x_1 se află deja pe drumul optim, rezultă $j = 3$, deci x_3 urmează după x_1 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, x_4, x_1, x_3, \ldots, x_6\}$.

Analog $\ell(x_1, x_3) = 4$ și $v_3 = v_1 - \ell(x_1, x_3) = 19$ reprezintă valoarea maximă a subdrumului de la x_3 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_3 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i = 3$ indicele j pentru care: $v_3 = c_{3j} + v_j = 19$.

Se obține $j = \{2,3\}$. Cum x_3 se află deja pe drumul optim, rezultă $j = 2$, deci x_2 urmează după x_3 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, x_4, x_1, x_3, x_2, \ldots, x_6\}$.

Avem și $\ell(x_3, x_2) = 6$, iar $v_2 = v_3 - \ell(x_3, x_2) = 11$ reprezintă valoarea maximă a subdrumului de la x_2 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_2 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i = 2$ indicele j pentru care: $v_2 = c_{2j} + v_j = 11$.

Se obține $j = \{2,5\}$ şi cum x_2 se află deja pe drumul optim, rezultă $j = 5$, deci x_5 urmează după x_2 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, x_4, x_1, x_3, x_2, x_5, ..., x_6\}$.

Avem şi $\ell(x_2, x_5) = 6$, iar $v_5 = v_2 - \ell(x_2, x_5) = 5$ reprezintă valoarea maximă a subdrumului de la x_5 la x_6 pe drumul optim.

Fie x_j vârful care urmează după x_5 pe drumul optim. Se caută în relația scrisă pentru $i = 5$ indicele *j* pentru care: $v_5 = c_{5j} + v_j = 5$.

Se obține $j = \{5,6\}$ şi cum x_5 se află deja pe drumul optim, rezultă $j = 6$. Dar x_6 este ultimul vârf al drumului optim, astfel că în acest moment s-a încheiat şi faza a II-a a algoritmului. $v_5 = 5$ reprezintă valoarea ultimului arc al drumului optim: $v_5 = 5 = \ell(x_5, x_6)$. Drumul de valoare maximă dintre vârfurile x_0 şi x_6 este $\mu = \{x_0, x_4, x_1, x_3, x_2, x_5, x_6\}$, este format din 6 arce şi valoarea sa maximă este $v_0 = 32$.

LECȚIA 9

3.11 Algoritmul matriceal pentru determinarea drumurilor de valoare minimă dintre două vârfuri oarecare ale unui graf

Fie $G=\left(X,U,\ell\right)$ un graf cu arce valorizate, $X=\left\{x_0,x_1,...,x_n\right\}$, $\ell:U\to\mathbb{R}_+$ şi $C=\left(c_{ij}\right)$, $i,j=0,1,2,...,n$ matricea valorilor arcelor grafului, unde

$$c_{ij}=\begin{cases}\ell\left(x_i,x_j\right), & \text{dacă } \left(x_i,x_j\right)\in U,\ i\neq j;\\ 0, & \text{dacă } i=j;\\ +\infty, & \text{dacă } \left(x_i,x_j\right)\notin U,\ i\neq j.\end{cases} \tag{3.11.1}$$

În etapa 0 a algoritmului lui Bellman-Kalaba s-a pornit cu valorile iniţiale:

$$v_i^{(0)}=c_{in},\ i=0,1,...,n, \tag{3.11.2}$$

iar în etapa *k*, $k\geq 1$, s-au calculat valorile:

$$v_i^{(k)}=\min_{s=0}^{n}\left(c_{is}+v_s^{(k-1)}\right),\ i=0,1,2,...,n-1,\ v_n^{(k)}=0, \tag{3.11.3}$$

unde $v_i^{(k)}$ reprezintă minimul valorilor drumurilor de la x_i la x_n formate din cel mult $k+1$ arce.

Se poate constata că vârful x_0 nu are o situaţie aparte faţă de celelalte vârfuri x_i, $i\neq n$ ale grafului, în etapele succesive ale algoritmului. Abia în faza a doua a algoritmului, deci după aflarea valorilor optime de la fiecare vârf x_i până la x_n, se ţine seama de faptul că interesează drumul optim de la x_0 la x_n. În fond x_0 şi x_n sunt două vârfuri oarecare ale grafului şi deci toate consideraţiile făcute în paragrafele anterioare (care se referă la algoritmul lui Bellman-Kalaba) pot fi utilizate pentru determinarea drumului optim între două vârfuri oarecare x_i şi x_j ale grafului.

În continuare se vor preciza modificările care trebuie făcute în algoritmul lui Bellman-Kalaba astfel încât în etapa *k* din faza I a algoritmului să se determine minimul valorilor drumurilor formate din cel mult $k+1$ arce dintre două vârfuri oarecare x_i şi x_j, $i\neq j$ ale grafului şi nu doar dintre vârfurile x_i, $i=0,1,...,n-1$ şi x_n.

Astfel, dacă în relaţia (3.11.3) vârful x_n nu ar fi subînţeles, atunci relaţia trebuie modificată astfel:

$$v_{in}^{(k)}=\min_{s=0}^{n}\left(c_{is}+v_{sn}^{(k-1)}\right),\ v_{nn}^{(k)}=0. \tag{3.11.4}$$

În această relaţie $v_{in}^{(k)}$ reprezintă minimul valorilor drumurilor de la x_i la x_n formate din cel puţin $k+1$ arce.

Dacă ne interesează minimul valorilor drumurilor de la vârful x_i la vârful x_j (în loc de x_n) formate din cel mult $k+1$ arce, $i \neq j$, atunci rolul lui x_n va fi luat de x_j şi relaţiile (3.11.4) devin:

$$v_{ij}^{(k)} = \min_{s=0}^{n}\left(c_{is} + v_{sj}^{(k-1)}\right),\ i \neq j\ ,\ v_{jj}^{(s)} = 0\ , \qquad \textbf{(3.11.5)}$$

iar relaţiile (3.11.2) din etapa 0 devin:

$$v_{ij}^{(0)} = c_{ij}\ ,\ (\forall)\ i, j = 0,1,2,...,n\ . \qquad \textbf{(3.11.6)}$$

Astfel, în fiecare etapă $k = 0,1,2,...$ din faza I a algoritmului se calculează matricea $\left\| v_{ij}^{(k)} \right\|$, $i, j = 0,1,2,...,n$. Vom nota această matrice cu $C^{(k+1)}$:

$$\left\| v_{ij}^{(k)} \right\| = C^{(k+1)}. \qquad \textbf{(3.11.6)}$$

Având în vedere relaţiile (3.11.6) rezultă:

$$C^{(1)} = C\ . \qquad \textbf{(3.11.7)}$$

Pe intervalul $[0,+\infty)$ vom defini operaţiile:

$$a \dot{+} b = \min\{a,b\}\ , \qquad \textbf{(3.11.8)}$$

cu convenţia $\min\{\infty,a\} = \min\{a,\infty\} = a$, $(\forall)\ a \in [0,+\infty)$ şi

$$a \dot{\times} b = a + b\ , \qquad \textbf{(3.11.9)}$$

a doua operaţie fiind adunarea obişnuită pe $[0,+\infty)$.

Se poate arăta uşor că aceste operaţii sunt asociative şi comutative, iar operaţia $\dot{\times}$ este distributivă faţă de operaţia $\dot{+}$. Rezultatul compunerii a *n* elemente din $[0,+\infty)$ cu operaţia $\dot{+}$ (3.11.8), respectiv „suma” $\left(a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} ... \dot{+} a_n\right)$, se va nota cu simbolul $\dot{\sum\limits_{s=1}^{n}} a_s$, iar dacă *n* este subînţeles, cu $\sum\limits_{s=1}^{\square} a_s$. Cu ajutorul acestor două operaţii definite pe $[0,+\infty)$ se poate defini, pe mulţimea matricelor pătrate de ordinul *m* cu elemente din $[0,+\infty)$, un „produs ” a două matrice, prin analogie cu înmulţirea obişnuită a matricelor, astfel:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{\square} a_{is} \dot{\times} b_{sj}\ ,\ (\forall)\ i, j = 0,1,2,...,m\ , \qquad \textbf{(3.11.10)}$$

unde $A = \left(a_{ij}\right)$ şi $B = \left(b_{ij}\right)$, $i, j = 1,2,...,m$. Vom spune că matricea $C = \left(c_{ij}\right)$ obţinută prin relaţiile (3.11.10) este „produsul” matricelor *A* şi *B* şi vom nota:

$$C = A \dot{\otimes} B. \tag{3.11.11}$$

Se arată uşor că operaţia $\dot{\oplus}$ dintre matrice este asociativă.

Având în vedere operaţiile $\dot{+}$ şi $\dot{\times}$ definite pe $[0, +\infty)$ prin relaţiile (3.11.8) şi (3.11.9) şi operaţia $\dot{\otimes}$ definită pe mulţimea matricelor pătratice de ordinul m cu elemente din $[0, +\infty)$ prin relaţia (3.11.10), rezultă că relaţiile (3.11.5) se scriu astfel:

$$v_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^{\square} c_{is} \dot{\times} v_{sj}^{(k-1)},\ (\forall)\ i, j = 0, 1, \dots, n. \tag{3.11.12}$$

Rezultă că matricea $C^{(k+1)}$ este produsul $\dot{\otimes}$ (relaţia (3.11.11)) matricelor C şi $C^{(k)}$, deci puterea ($k+1$) a matricei C în raport cu operaţia $\dot{\otimes}$ definită prin relaţia (3.11.11):

$$C^{(k+1)} = \underbrace{C \dot{\otimes} C \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} C}_{k+1} \tag{3.11.13}$$

Dată fiind semnificaţia valorilor $v_{ij}^{(k)}$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, rezultă că elementul $c_{ij}^{(k+1)}$ din matricea $C^{(k+1)}$ reprezintă valoarea minimă a drumului (drumurilor) de la vârful x_i la vârful x_j, formate din cel mult $k+1$ arce.

Faza I a algoritmului prezentat sub această formă, numit *algoritmul matriceal pentru determinarea drumului de valoare minimă între oricare două vârfuri distincte ale unui graf*, se încheie într-o etapă k în care se realizează condiţia:

$$C^{(k+1)} = C^{(k)}, \tag{3.11.14}$$

numită şi condiţia de oprire a algoritmului. $C^{(k+1)} = C^{(k)}$ este matricea drumurilor de valoare minimă dintre oricare două vârfuri ale grafului.

Faza a II-a a algoritmului, respectiv determinarea drumului (drumurilor) de valoare minimă între două vârfuri oarecare x_i şi x_j, va fi prezentată pe exemple; valoarea minimă a acestui drum este $v_{ij}^{(k+1)} = v_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k+1)}$ din matricea $C^{(k+1)} = C^{(k)}$.

Observaţia 3.11.1

Din prezentarea algoritmului matriceal pentru determinarea drumului de valoare minimă dintre două vârfuri oarecare ale unui graf rezultă că algoritmul lui Bellman-Kalaba este un caz particular al algoritmului matriceal. Într-adevăr, fie $V_j^{(k+1)}$ coloana j a matricei $C^{(k+1)}$: $V_j^{(k+1)} = \left(v_{0j}^{(k+1)}, v_{1j}^{(k+1)}, \dots, v_{nj}^{(k+1)}\right)^t$.

Atunci relaţiile (3.11.4) pentru $j = n$ se scriu astfel:

$$V_n^{(k+1)} = C \dot{\otimes} V_n^{(k)} \tag{3.11.15}$$

Altfel spus, în etapa k a algoritmului Bellman-Kalaba se determină numai ultima coloană a matricei $C^{(k+1)}$.

În mod asemănător şi varianta algoritmului Bellman-Kalaba prezentată şi exemplificată în paragraful 3.9 poate fi prezentată matriceal. Astfel, dacă se notează cu $V_i^{(k+1)}$ linia i a matricei $C^{(k+1)}$, adică:

$$V_i^{(k+1)} = \left(v_{i0}^{(k+1)}, v_{i1}^{(k+1)}, \dots, v_{in}^{(k+1)}\right),$$

atunci pentru $i = 0$, relațiile:

$$v_{0j}^{(k)} = \min_{s=0}^{n}\left(c_{sj} + v_{0s}^{(k-1)}\right), \qquad \textbf{(3.11.15)}$$

pot fi scrise astfel:

$$V_0^{(k+1)} = V_0^{(k)} \dot{\otimes} C. \qquad \textbf{(3.11.16)}$$

Cu alte cuvinte, în această variantă a algoritmului Bellman-Kalaba, în etapa k se determină prima linie a matricei $C^{(k+1)}$.

Exemplul 3.11.2

Să se determine matricea drumurilor de valoare minimă corespunzătoare grafului din figura următoare:

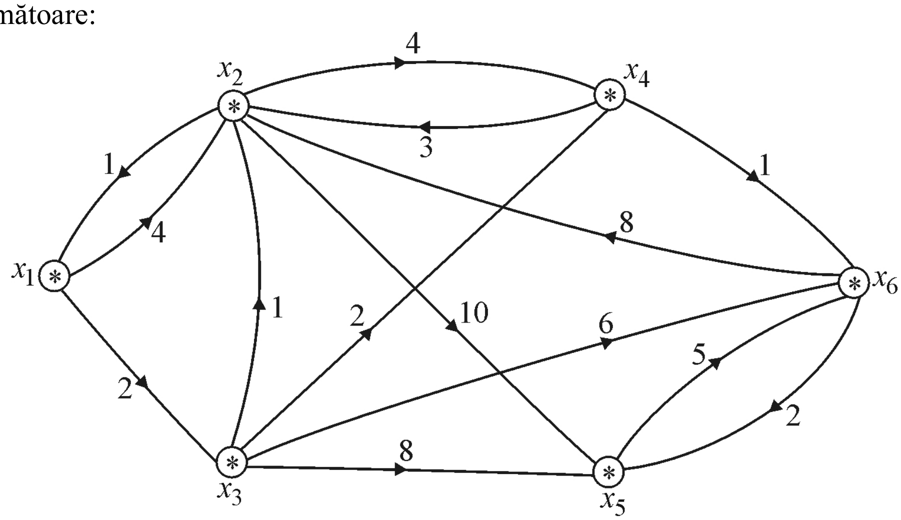


Fig. 3.11.1

Matricea C a valorilor drumurilor dintre oricare două vârfuri x_i şi x_j, $i, j = 1, 2, \dots, 6$, se completează cu ajutorul relațiilor (3.11.1) şi este următoarea:

$$C = C^{(1)} = \begin{array}{cccccc c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 0 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty & x_1 \\ 1 & 0 & \infty & 4 & 10 & \infty & x_2 \\ \infty & 1 & 0 & 2 & 8 & 6 & x_3 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & \infty & 1 & x_4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 5 & x_5 \\ \infty & 8 & \infty & \infty & 2 & 0 & x_6 \end{array}$$

În continuare, utilizând operațiile definite prin (3.11.8) şi (3.11.9) se calculează, cu relațiile (3.11.13) „puterile” succesive ale matricei *C*, în raport cu operația $\dot{\otimes}$ definită prin (3.11.10) şi (3.11.11)

$$C^{(2)}=\begin{pmatrix}0&3&2&4&10&8\\1&0&3&4&10&5\\2&1&0&2&8&3\\4&3&\infty&0&3&1\\\infty&13&\infty&\infty&0&5\\9&8&\infty&12&2&0\end{pmatrix};\ C^{(3)}=\begin{pmatrix}0&3&2&4&10&5\\1&0&3&4&7&5\\2&1&0&2&5&3\\4&3&6&0&3&1\\14&13&\infty&17&0&5\\9&8&11&12&2&0\end{pmatrix};$$

$$C^{(4)}=\begin{pmatrix}0&3&2&4&7&5\\1&0&3&4&7&5\\2&1&0&2&5&3\\4&3&6&0&3&1\\14&13&16&17&0&5\\9&8&11&12&2&0\end{pmatrix};\ C^{(5)}=\begin{pmatrix}0&3&2&4&7&5\\1&0&3&4&7&5\\2&1&0&2&5&3\\4&3&6&0&3&1\\14&13&16&17&0&5\\9&8&11&12&2&0\end{pmatrix}.$$

Se constată că pentru $k=5$ s-a obținut $C^{(5)}=C^{(4)}$, deci s-a realizat condiția de oprire a algoritmului matriceal. Matricea $C^{(5)}=C^{(4)}$ este matricea valorilor minime (optime) ale drumurilor de la orice vârf x_i la orice vârf x_j al grafului, $i,j=1,2,...,6$.

Drumurile optime dintre două vârfuri oarecare x_i şi x_j ale grafului pot fi determinate după obținerea matricei drumurilor optime. Să determinăm, cu ajutorul matricei $\left(v_{ij}\right)=C^{(5)}$, drumul de valoare minimă de la x_2 la x_5. Valoarea sa se află în matricea $C^{(5)}$, la intersecția liniei lui x_2 cu coloana lui $x_5 : v_{25}=7$.

Dacă pe drumul optim vârful x_i este succesorul lui x_2, atunci indicele *i* se va determina din relația:

$$c_{2i}+v_{i5}=v_{25}=7. \qquad \textbf{(3.11.17)}$$

Singurul indice diferit de 2 care verifică această relație este $i=4$. Analog, din aproape în aproape, se obține drumul $\mu=\left\{x_2,x_4,x_6,x_5\right\}$.

Observația 3.11.3

Datorită asociativității operației $\dot{\otimes}$ de înmulțire a matricelor definită prin relațiile (3.11.10) şi (3.11.11), rezultă că se poate reduce numărul etapelor necesare determinării matricei drumurilor de valoare minimă dintre oricare două vârfuri ale grafului. Într-adevăr, după calculul matricei $C^{(2)}$ se poate obține direct $C^{(4)}$ fără a mai calcula $C^{(3)}$:

$$C^{(4)}=C^{(2)}\dot{\otimes}C^{(2)}.$$

Mai departe, se obține direct $C^{(8)}$ fără a mai calcula $C^{(5)}$, $C^{(6)}$, $C^{(7)}$:

$$C^{(8)} = C^{(4)} \dot{\otimes} C^{(4)}, \text{ etc.}$$

Algoritmul se opreşte la pasul *r* pentru care $C^{\left(2^{r+1}\right)} = C^{\left(2^r\right)}$ şi în acest caz $C^{\left(2^r\right)}$ este matricea drumurilor de valoare minimă.

3.12 Algoritmul matriceal pentru determinarea drumurilor de valoare maximă dintre două vârfuri oarecare ale unui graf fără circuite

Întocmai ca şi algoritmii lui Ford sau Bellman-Kalaba, şi algoritmul matriceal poate fi utilizat pentru determinarea drumului (drumurilor) de valoare maximă dintre două vârfuri oarecare ale unui graf fără circuite. De la început se face menţiunea că algoritmul matriceal este şi în acest caz mai general decât algoritmul lui Bellman-Klaba, acesta regăsindu-se ca un caz particular în algoritmul matriceal.

Modificările de esenţă ale *algoritmului matriceal pentru determinarea drumului (drumurilor) de valoare minimă între oricare două vârfuri ale unui graf* care conduc la transformarea sa în *algoritmul matriceal pentru determinarea drumului (drumurilor) de valoare maximă între oricare două vârfuri ale unui graf fără circuite* sunt următoarele:

– în matricea $C = \left(c_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, ..., n$ a valorilor drumurilor formate dintr-un singur arc de la vârful x_i până la vârful x_j, $i, j = 1, 2, ..., n$, se va lua valoarea $-\infty$ (în loc de $+\infty$), dacă arcul $\left(x_i, x_j\right) \notin U$, $i \neq j$;

– pe intervalul $\left[-\infty, +\infty\right)$ se definesc operaţiile:

$$a \dot{+} b = \mathbf{max}\left\{a, b\right\}; \qquad \textbf{(3.12.1)}$$

$$a \dot{\times} b = a + b, \qquad \textbf{(3.12.2)}$$

cu ajutorul cărora se defineşte „produsul” $C = \left(c_{ij}\right)$ a două matrice $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, ..., n$, $C = A \dot{\otimes} B$, prin relaţiile:

$$c_{ij} = \dot{\sum_{r=1}} a_{ir} \dot{\otimes} b_{rj}, \ i, j = 1, 2, ..., n. \qquad \textbf{(3.12.3)}$$

Este evident că cele trei operaţii definite prin relaţiile (3.12.1), (3.12.2) şi (3.12.3) sunt asociative şi comutative, iar „înmulţirea” $\dot{\times}$ (3.12.2) este distributivă faţă de „adunarea” $\dot{+}$ (3.12.1).

În continuare, făcând aceleaşi raţionamente ca în paragraful anterior, se ajunge la concluzia că elementul $c_{ij}^{(k+1)}$ aflat la intersecţia liniei *i* cu coloana *j* din matricea

$$C^{(k+1)} = \underbrace{C \dot{\otimes} C \dot{\otimes} ... \dot{\otimes} C}_{k+1}, \qquad \textbf{(3.12.4)}$$

reprezintă maximul valorilor drumurilor de la vârful x_i la vârful x_j, formate din cel mult $k+1$ arce.

Dacă graful este fără circuite atunci există o valoare a lui *k* astfel încât

$$C^{(k+1)} = C^{(k)}, \qquad \textbf{(3.12.5)}$$

aceasta reprezentând condiția de oprire a algoritmului în faza I.

Matricea $C^{(k)}$ obținută în această etapă de calcul se numeşte *matricea drumurilor de valoare maximă*, iar valoarea elementului $c_{ij}^{(k)}$ reprezintă valoarea maximă a drumului (drumurilor) de la vârful x_i la vârful x_j, $(\forall)$ $i, j = 1, 2, ..., n$.

Drumul optim dintre vârfurile x_i şi x_j se determină după obținerea matricei drumurilor de valoare maximă, din aproape în aproape, în sensul de la x_i către x_j.

PROBLEME REZOLVATE LA UI 3 UTILIZÂND VARIANTE ALE ALGORITMILOR LUI FORD ŞI BELLMAN-KALABA

3.5 Variantă a algoritmului lui Ford

Algoritmul lui Ford poate fi organizat astfel încât numerele λ_i din fiecare etapă să aibă semnificația valorilor unor drumuri de la vârfurile x_i la x_n, $i = 0,1,2,...,n-1$.

Într-adevăr, să presupunem că pentru fiecare $i = 0,1,2,...,n-1$, dispunem de un drum de la x_i la x_n şi că valoarea acestui drum este λ_i. Luăm $\lambda_n = 0$.

Pentru orice arc $(x_i, x_j) \in U$ comparăm diferența $\lambda_i - \lambda_j$ cu $\ell(x_i, x_j)$.

Dacă $\lambda_i - \lambda_j > \ell(x_i, x_j)$, atunci λ_i nu reprezintă valoarea drumului optim de la x_i la x_n, căci putem afirma că există un drum de valoare mai mică între x_i şi x_n. Valoarea acestui drum este: $\lambda_i' = \lambda_j + \ell(x_i, x_j) < \lambda_i$.

Punem în evidență acest lucru în exemplul următor:

Fie drumurile $\mu_i = (x_i, x_k, ..., x_n)$, $\mu_j = (x_j, x_\ell, ..., x_n)$ şi $\mu_i' = (x_i, x_j, x_\ell, ..., x_n)$, ca în figura următoare:

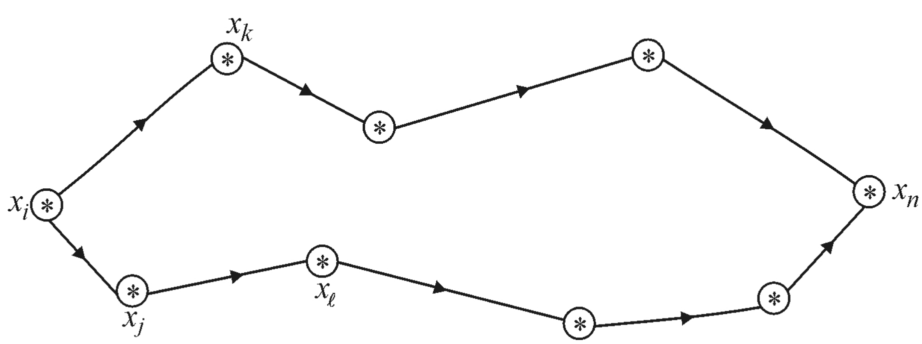


Fig. 3.5.1

Avem: $\ell(\mu_i) = \lambda_i$, $\ell(\mu_j) = \lambda_j$, $\ell(\mu_i') = \ell(x_i, x_j) + \lambda_j$.

Dacă pentru orice $(x_i, x_j) \in U$ are loc relația:

$$\lambda_i - \lambda_j \le \ell(x_i, x_j), \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

atunci rezultă la fel ca în teorema demonstrată anterior că λ_i sunt valorile optime. În acest caz vârfurile consecutive $x_i, x_j, ...$ ale unui drum optim verifică relația (3.5.1) cu semnul egal.

În etapa inițială se va lua: $\lambda_i^{(0)} = +\infty$, $i = 0,1,...,n-1$ şi $\lambda_n^{(0)} = 0$.

Exemplu

Să se determine drumul de valoare minimă de la x_0 la x_5 din graful următor, utilizând această variantă a algoritmului Ford.

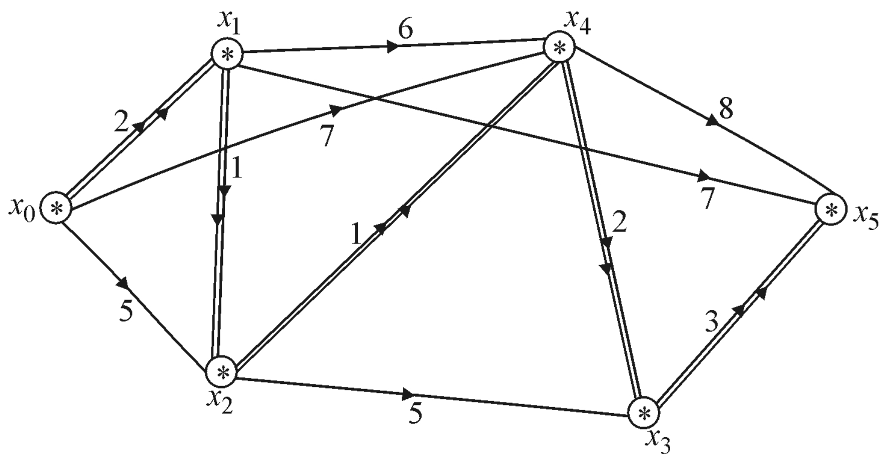


Fig. 3.5.2

În **etapa 0** (start) vom lua: $\lambda_0^{(0)} = \lambda_1^{(0)} = \ldots \lambda_4^{(0)} = +\infty$ şi $\lambda_5^{(0)} = 0$.

Rezultă că pentru orice $j \neq 5$ şi $(\forall\ )(x_i, x_j) \in U$ avem: $\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)} = 0 < \ell(x_i, x_j)$, iar pentru $j = 5$ avem:

$\lambda_1^{(0)} - \lambda_5^{(0)} = +\infty > \ell(x_1, x_5) = 7$;

$\lambda_3^{(0)} - \lambda_5^{(0)} = +\infty > \ell(x_3, x_5) = 3$;

$\lambda_4^{(0)} - \lambda_5^{(0)} = +\infty > \ell(x_4, x_5) = 8$.

Se pot îmbunătăţii, deci trei valori şi anume: $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_3^{(0)}$ şi $\lambda_4^{(0)}$, astfel că pentru etapa 1 vom lua:

$\lambda_1^{(1)} = \lambda_5^{(0)} + \ell(x_1, x_5) = 0 + 7 = 7$;

$\lambda_3^{(1)} = \lambda_5^{(0)} + \ell(x_3, x_5) = 0 + 3 = 3$;

$\lambda_4^{(1)} = \lambda_5^{(0)} + \ell(x_4, x_5) = 0 + 8 = 8$.

În rest, pentru $i = 0, 2, 5$ vom lua $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(0)} = +\infty$.

Pentru **etapa 1** vom scrie toate arcele (dar începând de la vârful x_0) grafului şi vom calcula diferenţele $\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)}$ corespunzătoare:

Vârful x_0:

$$\begin{cases} (x_0,x_1): \lambda_0^{(1)} - \lambda_1^{(1)} = +\infty - 7 = +\infty > \ell(x_0,x_1) = 2; \quad (*) \\ (x_0,x_2): \lambda_0^{(1)} - \lambda_2^{(1)} = +\infty - \infty = 0 < \ell(x_0,x_2) = 5; \\ (x_0,x_4): \lambda_0^{(1)} - \lambda_4^{(1)} = +\infty - 8 = +\infty > \ell(x_0,x_4) = 7; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\begin{cases} (x_1,x_2): \lambda_1^{(1)} - \lambda_2^{(1)} = 7 - \infty = -\infty < \ell(x_1,x_2) = 1; \\ (x_1,x_4): \lambda_1^{(1)} - \lambda_4^{(1)} = 7 - 8 = -1 < \ell(x_1,x_4) = 6; \\ (x_1,x_5): \lambda_1^{(1)} - \lambda_5^{(1)} = (7 - \infty) = (-\infty) < \ell(x_1,x_5) = 7; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} (x_2,x_3): \lambda_2^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = +\infty - 3 = +\infty > \ell(x_2,x_3) = 5; \quad (*) \\ (x_2,x_4): \lambda_2^{(1)} - \lambda_4^{(1)} = +\infty - 8 = +\infty > \ell(x_2,x_4) = 1; \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\left\{ (x_3,x_5): \lambda_3^{(1)} - \lambda_5^{(1)} = 3 - \infty = -\infty < \ell(x_3,x_5) = 3; \right.$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} (x_4,x_3): \lambda_4^{(1)} - \lambda_3^{(1)} = 8 - 3 = 5 > \ell(x_4,x_3) = 2; \quad (*) \\ (x_4,x_5): \lambda_4^{(1)} - \lambda_5^{(1)} = 8 - \infty = -\infty < \ell(x_4,x_5) = 8. \end{cases}$$

Se pot îmbunătății valorile: $\lambda_0^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$ şi $\lambda_4^{(1)}$, şi pentru etapa următoare vom lua:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(2)} = \lambda_1^{(1)} + \ell(x_0,x_1) = 7 + 2 = 9; \\ \lambda_0^{(2)} = \lambda_4^{(1)} + \ell(x_0,x_4) = 8 + 7 = 15. \end{cases}$$

Cum noi determinăm drumul de valoare minimă între x_0 şi x_5, vom prefera să luăm: $\lambda_0^{(2)} = 9$. Pentru $\lambda_2^{(2)}$ avem tot două posibilități:

$$\begin{cases} \lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(1)} + \ell(x_2,x_3) = 3 + 5 = 8; \\ \lambda_2^{(2)} = \lambda_4^{(1)} + \ell(x_2,x_4) = 8 + 1 = 9. \end{cases}$$

Conform aceluiaşi raționament vom lua: $\lambda_2^{(2)} = 8$. Pentru $\lambda_4^{(2)}$ vom avea: $\lambda_4^{(2)} = \lambda_3^{(1)} + \ell(x_4,x_3) = 3 + 2 = 5$. Deci $\lambda_4^{(2)} = 5$. În rest, pentru $i = 1,3,5$ vom avea: $\lambda_i^{(2)} = \lambda_i^{(1)}$ adică:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} = 7; & \lambda_0^{(2)} = 9; \\ \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(1)} = 3; & \lambda_2^{(2)} = 8; \\ \lambda_5^{(2)} = \lambda_5^{(1)} = +\infty; & \lambda_4^{(2)} = 5. \end{cases}$$

Etapa 2

Vârful x_0:

$$\begin{cases} (x_0,x_1): \lambda_0^{(2)} - \lambda_1^{(2)} = 9-7 = 2 = \ell(x_0,x_1); \\ (x_0,x_2): \lambda_0^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 9-8 = 1 < \ell(x_0,x_2) = 5; \\ (x_0,x_4): \lambda_0^{(2)} - \lambda_4^{(2)} = 9-5 = 4 < \ell(x_0,x_4) = 7; \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\begin{cases} (x_1,x_2): \lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} = 7-8 = -1 < \ell(x_1,x_2) = 1; \\ (x_1,x_4): \lambda_1^{(2)} - \lambda_4^{(2)} = 7-5 = 2 < \ell(x_1,x_4) = 6; \\ (x_1,x_5): \lambda_1^{(2)} - \lambda_5^{(2)} = 7-\infty = -\infty < \ell(x_1,x_5) = 7; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} (x_2,x_3): \lambda_2^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = 8-3 = 5 = \ell(x_2,x_3); \\ (x_2,x_4): \lambda_2^{(2)} - \lambda_4^{(2)} = 8-5 = 3 > \ell(x_2,x_4); \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\left\{ (x_3,x_5): \lambda_3^{(2)} - \lambda_5^{(2)} = 3-\infty = -\infty < \ell(x_3,x_5) = 3; \right.$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} (x_4,x_3): \lambda_4^{(2)} - \lambda_3^{(2)} = 5-3 = 2 = \ell(x_4,x_3); \\ (x_4,x_5): \lambda_4^{(2)} - \lambda_5^{(2)} = 5-\infty = -\infty < \ell(x_4,x_5) = 8. \end{cases}$$

Se poate îmbunătăți valoarea $\lambda_2^{(2)}$ şi pentru etapa următoare vom lua:

$\lambda_2^{(3)} = \lambda_4^{(2)} + \ell(x_2,x_4) = 5+1 = 6$, iar celelalte valori rămân nemodificate.

$\lambda_0^{(3)} = 9$, $\lambda_1^{(3)} = 7$, $\lambda_3^{(3)} = 3$, $\lambda_4^{(3)} = 5$, $\lambda_5^{(3)} = +\infty$.

Etapa 3

Vârful x_0:

$$\begin{cases} (x_0,x_1):\lambda_0^{(3)}-\lambda_1^{(3)}=9-7=2=\ell(x_0,x_1); \quad (*) \\ (x_0,x_2):\lambda_0^{(3)}-\lambda_2^{(3)}=9-6=3<\ell(x_0,x_2)=5; \\ (x_0,x_4):\lambda_0^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=9-5=4<\ell(x_0,x_4)=7; \end{cases}$$

Vârful x_1:

$$\begin{cases} (x_1,x_2):\lambda_1^{(3)}-\lambda_2^{(3)}=7-6=1=\ell(x_1,x_2); \quad (*) \\ (x_1,x_4):\lambda_1^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=7-5=2<\ell(x_1,x_4)=6; \\ (x_1,x_5):\lambda_1^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=7-\infty=-\infty<\ell(x_1,x_5)=7; \end{cases}$$

Vârful x_2:

$$\begin{cases} (x_2,x_3):\lambda_2^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=6-3=3<\ell(x_2,x_3)=5; \\ (x_2,x_4):\lambda_2^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=6-5=1=\ell(x_2,x_4) \quad (*) \end{cases}$$

Vârful x_3:

$$\left\{ (x_3,x_5):\lambda_3^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=3-\infty=-\infty<\ell(x_3,x_5)=3; \right.$$

Vârful x_4:

$$\begin{cases} (x_4,x_3):\lambda_4^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=5-3=2=\ell(x_4,x_3); \quad (*) \\ (x_4,x_5):\lambda_4^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=5-\infty=-\infty<\ell(x_4,x_5)=8. \end{cases}$$

Constatăm că la sfârşitul acestei etape pentru nici un vârf al grafului nu se înregistrează nici o relație de forma: $\lambda_i^{(3)}-\lambda_j^{(4)}>\ell(x_i,x_j)$, deci valorile $\lambda_i=\lambda_i^{(3)}$, $i=0,1,2,3,4,5$, sunt optime. Am marcat cu (*) toate relațiile de forma (3.3.1) verificate cu semnul „=” obținute la sfârşitul etapei 3.

Determinarea drumului optim de la x_0 la x_5

Primul vârf este x_0. Dacă x_i este al doilea vârf al acestui drum, atunci $\lambda_0-\lambda_i=\ell(x_0,x_i)$. Analizând aceste relații pentru vârful x_0, rezultă $i=1$. Deci x_1 este al doilea vârf pe drumul optim. Dacă x_i urmează după x_1 pe drumul optim, atunci trebuie să avem: $\lambda_1-\lambda_i=\ell(x_1,x_i)$. Rezultă $i=2$. Deci x_2 este al treilea vârf al drumului optim. Relația: $\lambda_2-\lambda_i=\ell(x_2,x_i)$ este verificată pentru $i=4$. Rezultă că x_4 este al patrulea vârf al drumului optim. $\lambda_4-\lambda_i=\ell(x_4,x_i)$. Rezultă $i=3$, deci vârful următor este x_3 şi apoi, ultimul vârf pe drumul optim este x_5. Aşadar drumul optim este $\mu=(x_0,x_1,x_2,x_4,x_3,x_5)$ şi lungimea sa este $\lambda_0=9$.

Observație

Pe varianta $\lambda_5^{(0)} = \lambda_5^{(1)} = \lambda_5^{(2)} = \lambda_5^{(3)} = 0$, se obține și drumul $\mu_1 = (x_0, x_1, x_5)$.

3.9 Variantă a algoritmului lui Bellman-Kalaba pentru determinarea drumurilor de valoare minimă între două vârfuri ale unui graf

Ca și în cazul algoritmului lui Ford și în cazul de față algoritmul lui Bellman-Kalaba poate fi organizat „în sens invers”, prin aceasta înțelegând următoarele: în etapele succesive ale algoritmului se vor determina valorile optime ale drumurilor formate dintr-un arc, din cel mult două arce, din cel mult trei arce etc., dar de la vârful inițial x_0 și până la fiecare din celelalte vârfuri x_j, $j = 1, 2, ..., n$ ale grafului. Algoritmul cuprinde aceleași faze și etape ca și în cazul anterior, prezentat în paragraful 3.8.

Faza I – *declanșarea și funcționarea algoritmului până la realizarea condiției de oprire.*

Faza I cuprinde mai multe etape.

Etapa 0.

– Se formează matricea $c = (c_{ij})$, $i, j = 1,\ 1, 2, ..., n$, conform relațiilor:

$$c_{ij} = \begin{cases} \ell(x_i, x_j), & \text{dacă } (x_i, x_j) \in U, i \neq j; \\ 0 & \text{, dacă } i = j; \\ +\infty & \text{, dacă } (x_i, x_j) \notin U, i \neq j. \end{cases} \qquad \textbf{(3.9.1)}$$

– Se definesc numerele $v_j^{(0)} = c_{0j}$, $j = 0, 1, 2, ..., n$, reprezentând valoarea minimă a drumurilor de la x_0 la x_j, $j = 1, 2, ..., n$, formate dintr-un singur arc. Aceste valori se află pe prima linie a matricei *C*, respectiv pe linia lui x_0.

Etapa *k* ($k \geq 1$).

În etapa *k* se calculează numerele $v_j^{(k)}$, $j = 1, 2, ..., n$, $v_0^{(k)} = 0$, reprezentând valoarea minimă a drumului de la x_0 la x_j format din cel mult $k+1$ arce, cu relațiile:

$$v_j^{(k)} = \min_{i=0}^{n}\left(c_{ij} + v_i^{(k-1)}\right),\ j = 1, 2, ..., n,\ v_0^{(k)} = 0. \qquad \textbf{(3.9.2)}$$

Dacă la sfârșitul etapei *k* există indici *j* pentru care $v_j^{(k)} < v_j^{(k-1)}$, aceasta înseamnă că valorile $v_j^{(k)}$ nu sunt optime și că există cel puțin un drum, de la x_0 la x_j format din $k+1$ arce, mai bun (deci de valoare mai mică) decât orice drum de la x_0 la x_j format din cel mult *k* arce; acest drum poate apare în etapa următoare, $k+1$.

Algoritmul se continuă până la prima etapă *k* în care se va obține:

$$v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)},\ (\forall)\ j = 0, 1, 2, ..., n. \qquad \textbf{(3.9.3)}$$

Valorile $v_j = v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)}$, $j = 0,1,2,...,n$, obținute la sfârşitul acestei etape sunt valorile optime şi reprezintă, pentru fiecare $j = 0,1,2,...,n$, valoarea minimă drumului (drumurilor) de la x_0 la x_j. Valoarea $v_n = v_n^{(k)}$ este valoarea minimă a drumului optim de la x_0 la x_n. Relațiile (3.9.3) reprezintă, în ansamblul lor, condiția de oprire a algoritmului în faza I.

Faza II – *determinarea drumului optim (de valoare minimă) de la* x_0 *la* x_n.

Determinarea drumului optim se face în sensul de la x_n către x_0, astfel:

– dacă x_i este primul vârf care-l precede pe x_n pe drumului optim, atunci se caută în relația (3.9.2) din ultima etapă a fazei I, scrisă pentru $j = n$, indicele *i* pentru care:

$$v_n = c_{in} + v_i. \tag{3.9.4}$$

– dacă se cunoaşte un vârf x_m al drumului optim şi $x_m \neq x_0$ şi dacă x_i este vârful care-l precede pe x_m pe drumul optim, atunci se caută în relația (3.9.2) din ultima etapă a fazei 1 scrisă pentru $j = m$, indicele *i* pentru care:

$$v_m = c_{im} + v_i. \tag{3.9.5}$$

– algoritmul se continuă până când ultimul vârf determinat al drumului optim este însuşi x_0.

Exemplul 3.9.1

Să se determine drumul de valoare minimă dintre vârfurile x_0 şi x_6 în graful din figura 3.8.1, utilizând această variantă a algoritmului lui Bellman-Kalaba.

Faza I

Etapa 0.

Matricea *C* este aceeaşi ca în cea din exemplul 3.8.1.

$$C = \begin{array}{ccccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 0 & 2 & \infty & 4 & 5 & \infty & \infty & x_0 \\ \infty & 0 & 12 & 1 & \infty & \infty & \infty & x_1 \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty & 2 & x_2 \\ \infty & \infty & 11 & 0 & 2 & 4 & 11 & x_3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & x_4 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 7 & x_5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & x_6 \end{array}$$

Numerele $v_j^{(0)} = c_{0j}$, $j = 0,1,...,6$ se află în matricea *C* pe linia corespunzătoare lui x_0 şi reprezintă valoarea minimă a drumurilor de la x_0 la x_j, $j = 1,2,...,6$, formate dintr-un singur arc. Vectorul $V^{(0)}$ este următorul:

$$V^{(0)} = (0,2,\infty,4,5,\infty,\infty).$$

Etapa 1; $k=1$.

Calculăm numerele $v_j^{(1)}$, $j=1,2,...,n$, $v_0^{(1)}=0$, cu relațiile (3.9.2), pentru $k=1$. Avem:

Pentru $j=0$: $v_0^{(1)}=0$.

Pentru $j=1$:

$$v_1^{(1)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i1}+v_i^{(0)}\right)=\min\left(2+0;0+2;\infty+\infty;\infty+4;\infty+5;\infty+\infty;\infty+\infty\right)=2.$$

Practic, se adună elementele corespunzătoare din coloana lui x_1 cu elementele vectorului $V^{(0)}$ (aflate în această etapă pe linia lui x_0 în matricea *C*), după care se determină cea mai mică valoare din vectorul rezultat.

Pentru $j=2$:

$$v_2^{(1)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i2}+v_i^{(0)}\right)=\min\left(\infty+0;12+2;0+\infty;11+4;\infty+5;2+\infty;\infty+\infty\right)=14$$

$$\Leftrightarrow \min\left(\text{coloana lui } x_2+\text{linia lui } x_0\right).$$

Pentru $j=3$:

$$v_3^{(1)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i3}+v_i^{(0)}\right)=\min\left(4+0;1+2;4+\infty;0+4;\infty+5;\infty+\infty;\infty+\infty\right)=3$$

$$\Leftrightarrow \min\left(\text{coloana lui } x_3+\text{linia lui } x_0\right).$$

Pentru $j=4$:

$$v_4^{(1)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i4}+v_i^{(0)}\right)=\min\left(5+0;\infty+2;\infty+\infty;2+4;0+5;\infty+\infty;\infty+\infty\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \min\left(\text{coloana lui } x_4+\text{linia lui } x_0\right).$$

Pentru $j=5$:

$$v_5^{(1)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i5}+v_i^{(0)}\right)=\min\left(\infty+0;\infty+2;\infty+\infty;4+4;3+5;0+\infty;\infty+\infty\right)=8$$

$$\Leftrightarrow \min\left(\text{coloana lui } x_5+\text{linia lui } x_0\right).$$

Pentru $j=6$:

$$v_6^{(1)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i6}+v_i^{(0)}\right)=\min\left(\infty+0;0+2;2+\infty;11+4;\infty+5;7+\infty;0+\infty\right)=15$$

$$\Leftrightarrow \min\left(\text{coloana lui } x_6+\text{linia lui } x_0\right).$$

La sfârşitul etapei 1 se obține vectorul:

$$V^{(1)}=\left(v_0^{(1)},v_1^{(1)},v_2^{(1)},...,v_6^{(1)}\right)=\left(0,2,14,3,5,8,15\right).$$

Comparând, pe componente, cu vectorul $V^{(0)}=\left(0,2,\infty,4,5,\infty,\infty\right)$, se constată că există indici *j* pentru care $v_j^{(1)}<v_j^{(0)}$ şi anume $j\in\{2,3,5,6\}$, deci valorile $v_j^{(1)}$ nu sunt optime, astfel că algoritmul continuă.

Etapa 2; $k=2$.

Se calculează valorile $v_j^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{ij}+v_i^{(1)}\right)$, $j=1,2,\ldots,6$, $v_0^{(2)}=0$ (relațiile (3.9.2), $k=2$). Practic, pentru fiecare $j=1,2,\ldots,6$ se va aduna (pe componente) coloana corespunzătoare vârfului x_j din matricea *C* cu vectorul $V^{(1)}$ obținut la sfârşitul etapei 1, element cu element şi apoi se determină cea mai mică valoare din fiecare vector astfel obținut. Rezultă:

$j=0$: $v_0^{(2)}=0$;

$j=1$: $v_1^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i1}+v_i^{(1)}\right)=2=v_1^{(1)}$;

$j=2$: $v_2^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i2}+v_i^{(1)}\right)=10<v_2^{(1)}=14$;

$j=3$: $v_3^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i3}+v_i^{(1)}\right)=3=v_3^{(1)}$;

$j=4$: $v_4^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i4}+v_i^{(1)}\right)=5=v_4^{(1)}$;

$j=5$: $v_5^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i5}+v_i^{(1)}\right)=7<v_5^{(1)}=8$;

$j=6$: $v_6^{(2)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i6}+v_i^{(1)}\right)=14<v_6^{(1)}=15$.

Se obține vectorul $V^{(2)}=\left(0,2,10,3,5,7,14\right)$. Comparând cu vectorul $V^{(1)}$ obținut la sfârşitul etapei 1, se constată că există indicii $j\in\left\{2,5,6\right\}$ pentru care $v_j^{(2)}<v_j^{(1)}$, deci valorile $v_j^{(2)}$ nu sunt optime.

Etapa 3; $k=3$.

Se calculează valorile $v_j^{(3)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{ij}+v_i^{(2)}\right)$, $j=1,2,\ldots,6$, $v_0^{(3)}=0$ şi se obține:

$j=0$: $v_0^{(3)}=0$;

$j=1$: $v_1^{(3)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i1}+v_i^{(2)}\right)=2=v_1^{(2)}$;

$j=2$: $v_2^{(3)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i2}+v_i^{(2)}\right)=9<v_2^{(2)}=10$;

$j=3$: $v_3^{(3)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i3}+v_i^{(2)}\right)=3=v_3^{(2)}$;

$j=4$: $v_4^{(3)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i4}+v_i^{(2)}\right)=5=v_4^{(2)}$;

$j=5$: $v_5^{(3)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i5}+v_i^{(2)}\right)=7=v_5^{(2)}$;

$j=6$: $v_6^{(3)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i6}+v_i^{(2)}\right)=12<v_6^{(2)}=14$.

Se obține vectorul $V^{(3)}=(0,2,9,3,5,7,12)$ și în urma comparației (pe componente) cu vectorul $V^{(2)}$ se constată că există indicii $j\in\{2,6\}$ pentru care $v_j^{(3)}<v_j^{(2)}$, deci valorile $v_j^{(3)}$ nu sunt optime și algoritmul continuă.

Etapa 4; $k=4$.

Se calculează valorile $v_j^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{ij}+v_i^{(3)}\right)$, $j=1,2,...,6$, $v_0^{(4)}=0$ și se obține:

$j=0$: $v_0^{(4)}=0$;

$j=1$: $v_1^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i1}+v_i^{(3)}\right)=2=v_1^{(3)}$;

$j=2$: $v_2^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i2}+v_i^{(3)}\right)=9=v_2^{(3)}$;

$j=3$: $v_3^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i3}+v_i^{(3)}\right)=3=v_3^{(3)}$;

$j=4$: $v_4^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i4}+v_i^{(3)}\right)=5=v_4^{(3)}$;

$j=5$: $v_5^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i5}+v_i^{(3)}\right)=7=v_5^{(3)}$;

$j=6$: $v_6^{(4)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i6}+v_i^{(3)}\right)=11<v_6^{(3)}$.

Se obține vectorul $V^{(4)}=(0,2,9,3,5,7,11)$ și există indicele $i=6$ astfel încât $v_6^{(4)}<v_6^{(3)}$, deci algoritmul continuă.

Etapa 5; $k=5$.

Se calculează valorile $v_j^{(5)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{ij}+v_i^{(4)}\right)$, $j=1,2,...,6$, $v_0^{(5)}=0$ și se obține:

$j=0$: $v_0^{(5)}=0$;

$j=1$: $v_1^{(5)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i1}+v_i^{(4)}\right)=2=v_1^{(4)}$;

$j=2$: $v_2^{(5)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i2}+v_i^{(4)}\right)=9=v_2^{(4)}$;

$j=3$: $v_3^{(5)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i3}+v_i^{(4)}\right)=3=v_3^{(4)}$;

$j=4$: $v_4^{(5)}=\min\limits_{i=0}^{6}\left(c_{i4}+v_i^{(4)}\right)=5=v_4^{(4)}$;

$$j=5:\ v_5^{(5)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i5}+v_i^{(4)}\right)=7=v_5^{(4)};$$

$$j=6:\ v_6^{(5)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i6}+v_i^{(4)}\right)=11=v_6^{(4)}.$$

Se obține vectorul $V^{(5)}=\left(0,2,9,3,5,7,11\right)$ care este identic cu $V^{(4)}$ de la sfârşitul etapei a 4-a, deci $v_j^{(5)}=v_j^{(4)}$ pentru toți indicii $j=0,1,...,6$, în acest moment fiind realizată condiția de oprire a algoritmului.

Prin urmare valorile $v_j=v_j^{(5)}=v_j^{(4)}$, $(\forall)$ $j=0,1,...,6$, reprezintă, pentru fiecare *j*, valoarea optimă (minimă) a drumului optim de la vârful inițial x_0 până la vârful x_j.

Faza a II-a – *determinarea drumului optim de la* x_0 *la* x_6.

Determinarea vârfurilor drumului optim se face în sensul de la x_6 către x_0. Valoarea minimă a acestui drum este $v_6=v_6^{(5)}=11$, deci valoarea ultimei componente a vectorului $V^{(6)}$ obținut la sfârşitul etapei a 5-a din faza I.

Se rescriu în detaliu, pe componente şi pentru fiecare indice $j=0,1,...,6$, relațiile (3.9.2), cu care s-au obținut valorile optime $v_j=v_j^{(5)}$ în ultima etapă ($k=5$) din faza I.

$$j=0:\ v_0=v_0^{(5)}=0;$$

$$j=1:\qquad v_1=v_1^{(5)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i1}+v_i^{(4)}\right)=$$

$$=\min\left(2+0;0+2;\infty+9;\infty+3;\infty+5;\infty+7;\infty+11\right)=2;$$

minimul se obține pentru $i\in\{0,1\}$.

$$j=2:\qquad v_2=v_2^{(5)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i2}+v_i^{(4)}\right)=$$

$$=\min\left(\infty+0;12+2;0+9;11+3;\infty+5;2+7;\infty+11\right)=9;$$

minimul se obține pentru $i\in\{2,5\}$.

$$j=3:\qquad v_3=v_3^{(5)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i3}+v_i^{(4)}\right)=$$

$$=\min\left(4+0;1+2;4+9;0+3;\infty+5;\infty+7;\infty+11\right)=3;$$

minimul se obține pentru $i\in\{1,3\}$.

$$j=4:\qquad v_4=v_4^{(5)}=\min_{i=0}^{6}\left(c_{i4}+v_i^{(4)}\right)=$$

$$=\min\left(5+0;\infty+2;\infty+9;2+3;0+5;\infty+7;\infty+11\right)=5;$$

minimul se obține pentru $i\in\{3,4\}$.

$$j=5: \qquad v_5 = v_5^{(5)} = \min_{i=0}^{6}\left(c_{i5} + v_i^{(4)}\right) =$$
$$= \min\left(\infty+0; \infty+2; \infty+9; 4+3; 3+5; 0+7; \infty+11\right) = 7;$$

minimul se obține pentru $i \in \{3,5\}$.

$$j=6: \qquad v_6 = v_6^{(5)} = \min_{i=0}^{6}\left(c_{i6} + v_i^{(4)}\right) =$$
$$= \min\left(\infty+0; \infty+2; 2+9; 11+3; 8+5; 7+7; 0+11\right) = 11;$$

minimul se obține pentru $i \in \{2,6\}$.

Presupunem că x_i este primul vârf care-l precede pe x_6 pe drumul optim de la x_0 la x_6: $\mu = \{x_0, ..., x_i, x_6\}$. Se caută în relația (3.9.4) scrisă pentru $j=6$ din ultima etapă indicele *i* pentru care: $v_6 = c_{i6} + v_i = 11$.

Se obține $i = \{2,6\}$. Cum x_6 este ultimul vârf al drumului optim, rezultă $i=2$, deci x_2 este vârful care-l precede pe x_6 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, ..., x_2, x_6\}$.

Cum $\ell(x_2, x_6) = 2$, rezultă că $v_6 - \ell(x_2, x_6) = 11 - 2 = 9 = v_2$ şi reprezintă valoarea minimă a subdrumului de la x_0 la x_2 pe drumul optim.

Fie x_i vârful care-l precede pe x_2 pe drumul optim. Se caută în relația (3.9.2) scrisă pentru $j=2$ din ultima etapă indicele *i* pentru care:

$$v_2 = c_{i2} + v_i = 9.$$

Se obține $i \in \{2,5\}$ şi cum x_2 se află deja pe drumul optim rezultă $i=5$, deci x_5 îl precede pe x_2 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, ..., x_5, x_2, x_6\}$.

Cum $\ell(x_5, x_2) = 2$, rezultă că $v_2 - \ell(x_5, x_2) = 9 - 2 = 7 = v_5$ şi reprezintă valoarea minimă a subdrumului de la x_0 la x_5 pe drumul optim.

Fie x_i vârful care-l precede pe x_5 pe drumul optim. Se caută în relația (3.9.2) scrisă pentru $j=5$ din ultima etapă indicele *i* pentru care:

$$v_5 = c_{i5} + v_i = 7.$$

Se obține $i = \{3,5\}$ şi cum x_5 se află deja pe drumul optim rezultă $i=3$, deci x_3 îl precede pe x_5 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, ..., x_3, x_5, x_2, x_6\}$.

Cum $\ell(x_3, x_5) = 4$, rezultă că $v_5 - \ell(x_3, x_5) = 7 - 4 = 3 = v_3$ şi reprezintă valoarea minimă a subdrumului de la x_0 la x_3 pe drumul optim.

Fie x_i vârful care-l precede pe x_3 pe drumul optim. Se caută în relația (3.9.2) scrisă pentru $j=3$ din ultima etapă indicele *i* pentru care:

$$v_3 = c_{i3} + v_i = 3.$$

Se obține $i = \{1,3\}$ şi cum x_3 se află deja pe drumul optim rezultă $i=1$, deci x_1 îl precede pe x_3 pe drumul optim: $\mu = \{x_0, ..., x_1, x_3, x_5, x_2, x_6\}$.

Cum $\ell(x_1, x_3) = 1$, rezultă că $v_3 - \ell(x_1, x_3) = 3 - 1 = 2 = v_1$ şi reprezintă valoarea minimă a subdrumului de la x_0 la x_1 pe drumul optim.

Fie x_i vârful care-l precede pe x_1 pe drumul optim. Se caută în relația (3.9.2) scrisă pentru $j = 1$ din ultima etapă indicele *i* pentru care:

$$v_1 = c_{i1} + v_i = 2 .$$

Se obține $i = \{0,1\}$ şi cum x_1 se află deja pe drumul optim, rezultă $i = 0$. Dar x_0 este primul vârf al drumului optim, astfel că în acest moment s-a încheiat şi faza a II-a a algoritmului. $v_1 = 2$ reprezintă valoarea primului arc, (x_0, x_1) al drumului optim. Prin urmare, drumul de valoare minimă dintre vârfurile x_0 şi x_6 este $\mu = \{x_0, x_1, x_3, x_5, x_2, x_6\}$, este format din 5 arce şi are valoarea minimă $v_6 = 11$.

Se constată că rezultatul final este identic cu cel obținut prin algoritmul lui Bellman-Kalaba în „sensul direct” de la x_0 la x_6, ceea ce era de aşteptat.

TESTE DE AUTOEVALOARE

Test de autoevaluare

Problema nr. 1

Într-o întreprindere există 7 secții între care se face permanent un schimb de produse sub diferite forme (componente, subansamble, ansamble, etc.). Posibilitățile de transport între cele 7 secții sunt reprezentate printr-un graf cu arce valorizate cu 7 vârfuri, având matricea conexiunilor următoare:

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_7 \end{array}.$$

Valoarea atașată fiecărui arc reprezintă timpul de transport dintre secțiile corespunzătoare extremităților arcului respectiv. Matricea valorilor arcelor grafului este următoarea:

$$C = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & x_1 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & x_2 \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 & x_3 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty & x_4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 & x_5 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & x_6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 0 & x_7 \end{array}.$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului schemei de transport;

2) Să se planifice transportul de la secția x_1 la secția x_5 astfel încât acesta să se facă într-un timp minim;

3) Cum trebuie organizat transportul între oricare dintre cele 7 secții ale întreprinderii, astfel încât timpul total de transport să fie minim;

4) Presupunând că datorită unei mai bune organizări a activității din întreprindere se micșorează timpul de transport de la secția x_2 la secția x_6 cu 2 unități de timp, să se determine soluția problemei de la punctul 3) în această ipoteză;

5) În ipoteza apariției unei defecțiuni care necesită suspendarea legăturii dintre secțiile x_6 și x_7, să se determine noua soluție a problemei de la punctul 4).

Problema nr. 2

Pentru prelucrarea unui produs complex într-o întreprindere economică, acesta poate trece pe la unele din stațiile $x_1, x_2, \ldots, x_8$, în care se execută anumite lucrări specifice fiecărei stații de lucru. Între aceste stații există un sistem de transport reprezentat printr-un graf a cărei matrice a conexiunilor este următoarea:

$$A = \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_8 \end{array}.$$

Valoarea atașată unui arc oarecare $\left(x_i, x_j\right)$ din această rețea de transport reprezintă creşterea, cu numărul respectiv, a beneficiului net pe unitatea de produs când acesta trece de la stația x_i la stația x_j pentru prelucrarea din stația x_j, atunci când valoarea este pozitivă, iar când este negativă, reprezintă o micşorare a acestui beneficiu, datorită faptului că transportul unitar dintre x_i şi x_j costă mai mult decât se câştigă prin îmbunătățirea adusă prin prelucrarea din stația x_j. Matricea valorilor arcelor grafului descris de matricea A este următoarea:

$$C = \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ 0 & -2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -4 & -\infty & x_1 \\ -\infty & 0 & 2 & -\infty & -\infty & -2 & -\infty & -\infty & x_2 \\ -\infty & -\infty & 0 & -1 & 1 & -\infty & -\infty & -2 & x_3 \\ 1 & -3 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & x_4 \\ -3 & -\infty & -\infty & -2 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & x_5 \\ -\infty & -\infty & -\infty & 3 & 1 & 0 & -\infty & -\infty & x_6 \\ -\infty & 1 & -\infty & -\infty & -2 & -3 & 0 & -\infty & x_7 \\ -2 & -\infty & -\infty & 1 & -\infty & -\infty & -1 & 0 & x_8 \end{array}.$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului sistemului de transport dintre cele 8 secții ale întreprinderii;

2) Să se determine matricea conexă terminală atașată grafului utilizând algoritmul lui Chen;

3) Să se stabilească dacă graful are circuite;

4) Să se determine numărul şi lungimea drumurilor (numărul arcelor) dintre oricare două vârfuri x_i şi x_j ale grafului;

5) Să se determine prin care dintre cele opt stații şi în ce ordine trebuie transportat produsul dacă, odată ajuns într-o stație, el trebuie supus prelucrării din stația respectivă şi astfel încât mărimea totală a beneficiului net pe unitatea de produs să fie maximă;

6) Cum se modifică soluția problemei dacă beneficiul suplimentar net la unitatea de produs, transportat de la stația x_6 la stația x_4 scade cu două unități;

7) Determinați cu algoritmul lui Ford valoarea maximă a drumului de la x_6 la x_5, în ipoteza $\ell\left(x_6, x_4\right) = 3$;

8) Determinați cu algoritmul lui Bellman-Kalaba valoarea maximă a drumului de la x_6 la x_5 în ipoteza de la punctul 6: $\ell\left(x_6, x_4\right) = 1$.

TEME DE CONTROL

Problema nr. 1

O companie de transport mărfuri trebuie să efectueze transportul unor produse între şapte puncte economice notate cu $x_1, x_2, ..., x_7$, acestea fiind întreprinderi, depozite, magazine de desfacere, etc. Rețeaua de transport este un graf cu 7 vârfuri, $x_1, x_2, ..., x_7$ şi având matricele A a conexiunilor, respectiv C a valorilor arcelor, următoare:

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_7 \end{array};$$

$$C = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 3 & 2 & 1 & x_1 \\ \infty & 0 & 2 & 4 & \infty & \infty & \infty & x_2 \\ 3 & \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & x_3 \\ \infty & 4 & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & x_4 \\ \infty & \infty & 3 & 4 & 0 & 2 & \infty & x_5 \\ 2 & \infty & 3 & \infty & 2 & 0 & \infty & x_6 \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & 0 & x_7 \end{array}.$$

Valoarea arcului (x_i, x_j) reprezintă valoarea cheltuielilor de transport pe unitatea de produs între vârfurile x_i şi x_j ale rețelei formate din cele 7 puncte economice.

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului rețelei de transport corespunzătoare matricelor A şi C;

2) Să se determine modul în care trebuie organizat transportul între două puncte arbitrare ale rețelei astfel încât costul total de transport să fie minim;

3) Să se determine modificările soluției problemei de transport de la punctul 2) în ipoteza că nu mai poate fi utilizată legătura de la punctul x_1 la punctul x_6.

Problema nr. 2

În departamentul de cercetare al unei fabrici din industria aeronautică s-au făcut studii şi cercetări privind influența anumitor tratamente suplimentare în prelucrarea unor piese asupra mărimii sau micşorării timpului mediu de funcționare al pieselor respective.

Rezultatele cercetărilor au arătat că acest timp se măreşte sau se micşorează cu un anumit număr de unități de timp, aceasta depinzând numai de ordinea în care se aplică aceste tratamente.

S-a stabilit că modificarea timpului mediu de funcționare a unei piese esențiale din ansamblul trenului de aterizare depinde de tratamentul aplicat la un moment dat şi de tratamentul aplicat anterior, existând numai posibilitățile indicate prin arcele unui graf cu 9 vârfuri, reprezentând cele 9 tratamente posibile care pot fi aplicate. Matricea conexiunilor acestui graf este următoarea:

$$A=\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_8\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_9
\end{array}.$$

Valoarea ataşată fiecărui arc $\left(x_i, x_j\right)$ reprezintă numărul de unități de timp cu care creşte timpul mediu de funcționare al piesei dacă se aplică consecutiv tratamentele x_i şi x_j, cu convenția că o valoare pozitivă reprezintă o creştere propriu-zisă, iar o valoare negativă reprezintă o scădere a acestui timp. Matricea valorilor arcelor grafului este următoarea:

$$C=\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
0 & -\infty & -\infty & 1 & 2 & 6 & -\infty & -\infty & -\infty & x_1\\
-7 & 0 & -4 & -\infty & 8 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & x_2\\
-\infty & 1 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 4 & x_3\\
-2 & 2 & 2 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & x_4\\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty & x_5\\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & -\infty & -\infty & x_6\\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -2 & 0 & 1 & -\infty & x_7\\
-\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 6 & -\infty & -2 & 0 & -\infty & x_8\\
-\infty & -1 & -\infty & -\infty & 5 & 3 & -\infty & 2 & 0 & x_9
\end{array}.$$

Cercetările au evidențiat şi faptul că modificările din timpul mediu de funcționare a piesei descrise prin graful dat, se cumulează prin aplicarea succesivă a mai multor tratamente succesive, dar nu mai multe de 10; aplicarea a mai mult de 10 tratamente devine incomodă şi costisitoare şi creşterea numărului lor peste 10 nu conduce la modificarea semnificativă a timpului mediu de funcționare a piesei.

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului celor 9 tratamente termice, având matricea conexiunilor A şi matricea valorilor arcelor C;

2) Să se determine matricea drumurilor T ataşată grafului şi să se precizeze dacă în graf există circuite;

3) Să se determine care dintre cele 9 tratamente posibile trebuie efectuate asupra piesei şi care este ordinea aplicării lor astfel încât timpul mediu de funcționare a piesei să crească cu un număr cât mai mare de unități de timp;

4) Presupunând că în urma unor studii suplimentare s-a constatat că aplicarea tratamentului x_7 după tratamentul x_5 conduce la creşterea timpului mediu de funcționare a piesei cu 5 unități de timp, să se determine soluția problemei în această ipoteză suplimentară.

Problema nr. 3

Între opt puncte de lucru ale unui sistem economic există o rețea de transport al cărui graf este dat prin matricea A a conexiunilor dintre vârfurile $x_1, x_2, ..., x_8$ ale sale, unde:

$$A = \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_8 \end{array}.$$

Valorile asociate fiecărui arc $\left(x_i, x_j\right)$ reprezintă cheltuielile de transport corespunzătoare, pe unitatea de produs transportată, de la punctul x_i la punctul x_j al rețelei. Matricea valorilor arcelor grafului este următoarea:

$$C = \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 1 & x_1 \\ \infty & 0 & 5 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & x_2 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & x_3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 & \infty & 2 & x_4 \\ 3 & \infty & \infty & 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & x_5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 0 & 2 & \infty & x_6 \\ 4 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & \infty & x_7 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & x_8 \end{array}.$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului cu arce valorizate a sistemului de transport dintre cele opt puncte ale sistemului economic aferent matricelor A şi C;

2) Să se determine matricea drumurilor asociată acestui graf utilizând algoritmul lui Chen;

3) Să se stabilească dacă graful are circuite;

4) Să se determine cum trebuie organizat transportul între oricare două puncte ale sistemului astfel încât costul total de transport între aceste puncte să fie minim;

5) Să se studieze cum se modifică această organizare dacă apare o nouă posibilitate de transport, între vârfurile x_3 şi x_7, valoarea asociată acestui arc fiind de două unităţi băneşti.

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE NR. **3:**

1. Claude Berge: ***Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei***, Editura tehnică, Bucureşti, 1969;
2. Tiberiu Ionescu: Grafuri. Aplicaţii, Vol I, II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, Bucureşti, 1973;
3. Al. Roşu: ***Teoria grafurilor***. ***Algoritmi şi aplicaţii***, Editura militară, Bucureşti, 1974;
4. C. Dinescu, B. Săvulescu: ***Metode de matematică modernă pentru economişti. Culegere de probleme***, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975;
5. O. Popescu, D.P. Vasiliu, ş.a.: ***Matematici aplicate în economie***, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1997;
6. Nicolae Micu: ***Teoria grafurilo***r, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1981;
7. C. Dinescu, I. Fătu: ***Matematici pentru economişti***, vol. II, III, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1995.
8. Dragoş-Radu Popescu: Combinatorică şi teoria grafurilor, Biblioteca Societăţii de Stiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.

Chestionar feedback

În dorința de ridicare continuă a standardelor desfăşurării activităților dumneavoastră, va rugăm ca după parcurgerea fiecărei unități de învățare să completați acest chestionar şi să-l transmiteți indrumatorului de an.

Disciplina: Algoritmica grafurilor
Unitatea de invatare/modulul:__________________
Anul/grupa:__________________________
Tutore:_________________________

Partea I . Conținut

1. Care dintre subiectele tratate in aceasta unitate/modul considerați că este cel mai util şi eficient? Argumentati raspunsul.

2. Ce aplicatii/proiecte din activitatea dumneavoastra doriți să imbunatatiti/modificați/implementați în viitor în urma cunoştințelor acumulate în cadrul acestei unitati de invatare/modul?

3. Ce subiecte din acesta unitate de invatare/modul considerați că ar fi trebuit să fie tratate mai extins ?

4. La care aplicatii practice ati intampinat dificultati in realizare? Care credeti ca este motivul dificultatilor intalnite?

5. Timpul alocat acestui modul a fost suficient?

6. Daca ar fi sa va evaluati cunostintele acumulate din parcurgerea unitatii de invatare/modului, care este nota pe care v-o alocati, pe o scala de la 1-10?. Argumentati.

Partea II. Impresii generale

1. Acest modul a întrunit aşteptările dumneavoastră?

□ În totalitate □ În mare măsură □ În mică măsură □ Nu

2) Aveți sugestii care să conducă la creşterea calității acestei unitati de invatare/modul?

3) Aveți propuneri pentru alte teme în cadrul acestei discipline ? Argumentati.

4) Cunoaşteți care sunt disciplinele din anii următori de studiu la care veți utiliza cunoştințele dobândite la această disciplină ?

Vă mulțumim pentru răspunsul dumneavoastră!