

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 2 – CALCUL DIFERENȚIAL ÎN $\mathbb{R}$ ȘI $\mathbb{R}^n$

Obiective urmărite:

1. Însușirea noțiunilor fundamentale și a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor din domeniul calculului diferențial în $\mathbb{R}$ și $\mathbb{R}^n$;
2. Formarea și dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale și de specialitate din anii superiori;
3. Formarea și dezvoltarea deprinderilor și aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă și argumentare fundamentată în soluționarea problemelor de natură matematică și de specialitate, precum și formarea și dezvoltarea unui raționament riguros și a abilităților de calcul rapid și corect necesare pentru diferite aplicații.
4. Formarea și dezvoltarea capacităților de abstractizare, generalizare și sinteză;
5. Aplicarea analizei matematice în alte domenii ale științei și practicii.

Rezumat:

În această unitate de învățare sunt prezentate, pe parcursul a două lecții, principalele noțiuni teoretice referitoare la limite de funcții vectoriale de variabilă vectorială, continuitatea și diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială, funcții implicite, dependență funcțională, extremele libere și condiționate ale funcțiilor de mai multe variabile, precum și algoritmii cei mai des întâlniți pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestui modul.

După parcurgerea celor două lecții din cuprinsul unității de învățare studenții vor dobândi cunoștințele teoretice și își vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaște, înțelege și rezolva probleme specifice referitoare la tematica anunțată anterior.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecții sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule și algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noțiunilor teoretice și algoritmilor de rezolvare prezentați anterior;
- în finalul fiecărei lecții este propus un test de autoevaluare și la sfârșitul unității de învățare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate, ordonate după gradul lor de dificultate și acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învățare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unității de învățare, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exercițiu se recomandă identificarea algoritmului și descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluțiilor problemelor rezolvate și rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare și în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

Funcție reală de variabilă vectorială, funcție vectorială de variabilă vectorială, limite iterate, continuitate parțială, derivate parțiale, diferențiabilitate, extreme libere și extreme condiționate, funcții implicite și extreme de funcții implicite, dependență funcțională, transformări regulate.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii și însușirii noțiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare și dobândirii competențelor anunțate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecție, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare și a Temelor de control.

LECȚIA 1 - FUNCȚII VECTORIALE. LIMITE. CONTINUITATE

1. Funcții vectoriale. Limite. Continuitate

Definiția 3.1.1. O funcție $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, se numește *funcție reală de variabilă vectorială* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$.

Definiția 3.1.2. Fie m funcții reale $f_1, f_2, \dots, f_m$ definite pe o aceeași mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$. Corespondența:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

definește o funcție $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ pe $X \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Se spune că f este o *funcție vectorială de variabilă vectorială*.

Definiția 3.1.3. Fie funcția $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ și a un punct de acumulare al mulțimii X . Se spune că un vector $b \in \mathbb{R}^m$ este *limita funcției f în punctul a* dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall) x \in X$, $x \neq a$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Notăție: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Definiția 3.1.4. Fie funcția $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ și $a \in X$. Se spune că funcția f este *continuu în punctul a* dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall) x \in X$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Dacă a este punct de acumulare al mulțimii X , atunci continuitatea funcției f în a este echivalentă cu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ sau } \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| = 0.$$

Observații:

1) Dacă f este continuă în punctul a , există o vecinătate a lui a în care funcția este mărginită.

2) Dacă f este continuă în punctul a , atunci funcția $\|f\|$ este continuă în punctul a . Reciproca nu este adevărată în general.

3) Dacă f și g sunt continue în punctul a , funcțiile $f + g$ și $\lambda \cdot f$ sunt continue în a .

4) Dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ în $\mathbb{R}^m$ și f nu este definită în punctul a , atunci f se poate prelungi prin continuitate în punctul a , punând condiția $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

5) Fie funcțiile $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^p$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Dacă funcția f este continuă în punctul $a \in X$, iar funcția g este continuă în punctul $b = f(a) \in Y$, atunci funcția compusă $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$ este continuă în punctul $a \in X$.

6) Fie funcția reală $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Dacă f este continuă în punctul $a \in X$ și $f(a) \neq 0$, există o vecinătate V a lui a , astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \cdot f(a) > 0$.

7) Fie funcția vectorială $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ continuă în punctul $a \in X$ și $f(a) \neq 0$. Atunci există o vecinătate V a lui a , astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \neq 0$.

Definiția 3.1.5. Fie $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ și $a \in X$. Fie submulțimea $X_i = \{x_i \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in X\} \subset X$. Pe aceasta, funcția f este o funcție f_i de o singură variabilă $x_i \in X_i$. Dacă f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$, spunem că f este **continuă parțial în raport cu variabila** x_i în punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Teorema 3.1.6. O funcție f continuă într-un punct $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Dacă o funcție este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acel punct.

Exemplu

Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dacă $x = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$, deci funcția f este continuă în raport cu variabila y în punctul $(0, 0)$.

Dacă $y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$, deci funcția f este continuă în raport cu variabila x în punctul $(0, 0)$.

În același timp, funcția f nu este continuă în punctul $(0,0)$, deoarece pentru $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, cu $y^6 = m \cdot x, m \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{3m}{1+m^2}$, limită care depinde de parametrul real m , deci nu este unică.

Definiția 3.1.7. Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n$. Se spune că f este **uniform continuă** pe X , dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi punctele $x, x' \in X$ cu $\|x - x'\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

Teorema 3.1.8. O funcție f uniform continuă pe o mulțime X este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă.

Observații:

O funcție vectorială continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$ este mărginită pe I .

O funcție vectorială continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$ este uniform continuă pe I .

Pentru o funcție vectorială continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$ există un punct $\xi \in I$, astfel încât $\|f(\xi)\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$.

O funcție reală de variabilă vectorială, continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$, își atinge marginile.

Exemple

1) Fie funcția $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definită pe discul $x^2 + y^2 \leq R^2$. Aceasta este continuă pe domeniul ei de definiție. Minimum funcției este atins în punctul $(0,0)$ și are valoarea 0, iar maximum funcției este atins în orice punct (x,y) situat pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 = R^2$ și are valoarea R .

2) Funcția $f(x,y)$ definită pe discul $x^2 + y^2 \leq R^2$ prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este uniform continuă pe domeniul de definiție, deoarece nu este continuă în punctul $(0,0)$.

Observație. Vom particulariza, în continuare, noțiunea de continuitate uniformă pe $\mathbb{R}$.

Definiția 3.1.9. Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$. Se spune că f este **uniform continuă** pe X , dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi punctele $x, x' \in X$ cu $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru mulțimea X .

Atunci există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dacă și numai dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall) x', x'' \in X$, care verifică $|x'| < \delta(\varepsilon)$, $|x''| < \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2. Derivate parțiale de ordinul I

Definiția 3.2.1. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ și (a, b) un punct interior lui X . Se spune că:

f este **derivabilă parțial** în (a, b) , **în raport cu variabila** x , dacă:
 $(\exists) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} < +\infty$, iar limita se numește **derivata parțială** a lui f **în raport cu** x și se notează $f'_x(a, b)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$;

f este **derivabilă parțial** în (a, b) , **în raport cu variabila** y , dacă:
 $(\exists) \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} < +\infty$, iar limita se numește **derivata parțială** a lui f **în raport cu** y și se notează $f'_y(a, b)$ sau $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Observație. Dacă o funcție este derivabilă parțial în raport cu variabila x în fiecare punct al mulțimii de definiție X , spunem că funcția este derivabilă parțial în raport cu x pe mulțimea X .

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ este derivabilă parțial în raport cu x și cu y pe $\mathbb{R}^2$ și $f'_x(x, y) = 2x \cdot e^{x^2 + y^2}$, $f'_y(x, y) = 2y \cdot e^{x^2 + y^2}$.

Definiția 3.2.2. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ și $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un punct interior lui X . Funcția f este **derivabilă parțial în punctul** $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ **în raport cu variabila** x_k dacă:

$$(\exists) \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_k - a_k} \text{ și este finită.}$$

Limita se numește **derivata parțială a lui** f **în raport cu variabila** x_k și se notează

$$f'_{x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

O funcție $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are n derivate parțiale.

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2)$ are derivatele parțiale:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{2x \cdot y^2 \cdot z^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}, \quad f'_y(x, y, z) = \frac{2y \cdot x^2 \cdot z^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{2z \cdot y^2 \cdot x^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}, \quad (\forall) (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Observații

1) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k în punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, atunci f este continuă parțial în raport cu variabila x_k în punctul a .

2) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, \dots, x_n$ în punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, atunci f este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte în punctul a .

Definiția 3.2.3. Fie funcția vectorială $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, componentele sale $f_1, f_2, \dots, f_m$ fiind funcții reale derivabile parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, \dots, x_n$ într-un punct $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$.

Derivata parțială a funcției f în raport cu x_k în punctul a este definită prin:

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_k - a_k}$$

și se notează cu $f'_{x_k}(a)$.

Observație

Dacă se consideră funcția f raportată la o bază $e_1, e_2, \dots, e_m$, atunci:

$$f(x) = e_1 \cdot f_1(x) + e_2 \cdot f_2(x) + \dots + e_m \cdot f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Derivata sa parțială $f'_{x_k}(a)$ are componentele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n), \dots, \quad \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Exemplu

$$\text{Funcția vectorială} \quad \vec{f}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{x}{y^2 + z^2 + 1} + \vec{j} \cdot \frac{y}{z^2 + x^2 + 1} + \vec{k} \cdot \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}$$

definită pe $\mathbb{R}^3$ are derivatele parțiale de forma:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{1}{y^2 + z^2 + 1} + \vec{j} \cdot \frac{-2xy}{(x^2 + z^2 + 1)^2} + \vec{k} \cdot \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + 1)^2};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xy}{(y^2 + z^2 + 1)^2} + \vec{j} \cdot \frac{1}{(x^2 + z^2 + 1)} + \vec{k} \cdot \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + 1)^2};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xz}{(y^2 + z^2 + 1)^2} + \vec{j} \cdot \frac{-2yz}{(x^2 + z^2 + 1)^2} + \vec{k} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)}.$$

3. Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiabilitate

Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă în parte, în punctele interioare ale lui X . Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sunt, la rândul lor, derivabile parțial în raport cu fiecare dintre variabile, atunci derivatele lor parțiale se numesc **derivate parțiale de ordinul doi** ale lui f și se notează prin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}. \end{aligned}$$

Exemplu

Funcția $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ definită pe $\mathbb{R}^2$ are derivatele parțiale:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \\ f''_{xx}(x, y) &= \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ f''_{yy}(x, y) &= \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = f''_{yx}. \end{aligned}$$

f''_{xy} , f''_{yx} se numesc **derivate parțiale mixte de ordinul al doilea**.

Criteriul lui Schwarz. Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ și punctul $(x_0, y_0) \in X$. Dacă există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) și sunt continue în (x_0, y_0) , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Definiția 3.2.4. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ și (a, b) un punct interior al lui X . Atunci funcția f este **diferențiabilă în punctul (a, b)** , dacă există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și există o funcție $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în (a, b) , astfel încât:

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda \cdot (x - a) + \mu \cdot (y - b) + \omega(x, y) \cdot \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

pentru $(\forall) (x, y) \in X$.

Observație. Dacă f este diferențiabilă în punctul (a, b) , atunci f admite derivate parțiale de ordinul întâi în (a, b) și $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\mu = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Definiția 3.2.5. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ și (a, b) un punct interior lui X , astfel încât funcția f admite derivate parțiale continue în (a, b) .

$df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot dy$ se numește **diferențiala de ordinul I a funcției f în punctul (a, b)** .

Definiția 3.2.6. Operatorul $d = \frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy$ care aplicat funcției f dă diferențiala funcției f în punctul (x, y) se numește **operatorul de diferențiere**.

Criteriul lui Young. Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ și punctul $(x_0, y_0) \in X$. Dacă există derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ într-o vecinătate V a punctului (x_0, y_0) și sunt diferențiabile în (x_0, y_0) , atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Observații:

Pentru o funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ **diferențiala** de ordinul întâi este:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n,$$

iar **operatorul de diferențiere** de ordinul întâi este:

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Pentru o funcție vectorială $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, **diferențiala** este:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ și: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

de unde rezultă că

$$df = \frac{x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Este diferențiala funcției f pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Definiția 3.2.7. Diferențiala unei funcții de mai multe variabile se numește *diferențiala totală* a funcției.

Teorema 3.2.8. Condiția necesară și suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ să fie identic nulă pe I este ca f să fie constantă pe I .

Teorema 3.2.9. Fie expresia diferențială $E = P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$, unde funcțiile P și Q sunt continue pe $I \subset \mathbb{R}^2$.

Dacă E este diferențiala unei funcții $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pentru orice punct $(x, y) \in I$, atunci:

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (\forall) (x, y) \in I.$$

Teorema 3.2.10. Condiția necesară și suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ să fie identic nulă pe I este ca f să fie constantă pe intervalul I .

Teorema 3.2.11. Fie expresia diferențială

$$P_1(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 + P_2(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_2 + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_n$$

cu funcțiile componente $P_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, continue pe $I \subset \mathbb{R}^n$. Dacă expresia diferențială este diferențiala unei funcții $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in I$, atunci $P_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, P_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Definiția 3.2.12. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă parțial de două ori în X și cu derivatele parțiale de ordinul doi (deci, și cele de ordinul întâi) continue. **Diferențiala de ordinul doi** se notează cu $d^2 f(x, y)$ și este definită prin:

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy^2.$$

Operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^{(2)}$$

se numește *operatorul de diferențiere de ordinul doi*.

Definiția 3.2.13. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, care are în X toate derivatele parțiale de ordinul n continue. **Diferențiala de ordinul n** a funcției f se notează cu $d^n f(x, y)$ și este definită prin:

$$d^n f(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cdot dx^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot dx^{n-1} \cdot dy + \dots + \\ + C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \cdot dx^{n-k} \cdot dy^k + \dots + C_n^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \cdot dy^n.$$

Operatorul $d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^{(n)}$ se numește **operatorul de diferențiere de ordinul n** .

Derivatele și diferențialele funcțiilor compuse

1) Dacă funcțiile $u, v : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au derivate continue pe X și dacă funcția $f : Y \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are derivate parțiale continue pe Y , atunci funcția $F(x) = f(u(x), v(x))$, $(\forall) x \in X$, are derivata continuă pe X dată de:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

2) Dacă funcțiile $u, v : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ au derivate parțiale continue pe X și dacă funcția $f : Y \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are derivate parțiale continue pe Y , atunci funcția $F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ are derivate parțiale continue pe X , date de:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

3) Diferențiala funcției F este dată de:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy.$$

Exemplu

Fie $F(x, y) = f(x^2 + y^2, 1 + xy)$ definită pe $\mathbb{R}^2$.

Considerând $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 1 + xy$ avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x.$$

Diferențiala funcției F este

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y \right) \cdot dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x \right) \cdot dy.$$

Observație

Derivatele parțiale și diferențialele de ordin superior se calculează astfel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right).$$

$$d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot dy^2.$$

4. Formula lui Taylor pentru funcții de două variabile

Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă de $n+1$ ori pe X , cu toate derivatele mixte egale și fie (a, b) un punct interior lui X . Se consideră funcția $F(t) = f[a + (x-a) \cdot t, b + (y-b) \cdot t]$, $(x, y) \in X$, $t \in [0, 1]$.

Deoarece f are derivate până la ordinul $n+1$ pe X , rezultă că și F este derivabilă până la ordinul $n+1$ pe intervalul $[0, 1]$, iar funcției F i se poate aplica formula lui Taylor stabilită pentru funcțiile de o variabilă. Rezultă că:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} \cdot F'(0) + \frac{1}{2!} \cdot F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot F^{(n)}(0) + R_n,$$

unde restul $R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

Având în vedere că $F(1) = f(x, y)$, $F(0) = f(a, b)$, $F(t) = f(x(t), y(t))$, unde $x(t) = a + (x-a) \cdot t$, $y(t) = b + (y-b) \cdot t$ și calculând derivatele de ordin superior ale lui F în punctul 0, se obține formula:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot f(a, b) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \cdot f(a, b) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \cdot f(a, b) + R_n,\end{aligned}$$

unde restul are expresia:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} \cdot f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)),$$

cu $\theta \in (0,1)$.

5. Extremele libere ale funcțiilor de mai multe variabile

Definiția 3.3.1. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ și punctul $x_0 \in X$. Funcția f are un **minim local** în x_0 , dacă există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$, $(\forall) x \in V$.

Punctul x_0 este punct de **maxim local** pentru funcția f , dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $(\forall) x \in V$.

Teorema 3.3.2. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ și $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un punct interior lui X . Dacă:

funcția f are un extremum în punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$,

funcția f are derivate parțiale în punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$,

atunci derivatele parțiale ale lui f se anulează în punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Observația 3.3.3. Punctele în care funcția f poate avea extreme sunt date de soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului se numesc **puncte critice** sau **puncte staționare**.

Pentru $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ punct critic pentru funcția f , se notează

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Atunci:

1) dacă toți determinanții

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt pozitivi, funcția f are un minim în punctul respectiv;

2) dacă toți determinanții $\Delta_1^* = -\Delta_1$, $\Delta_2^* = \Delta_2, \dots$, $\Delta_n^* = (-1)^n \cdot \Delta_n$ sunt pozitivi, funcția f are un maxim în punctul respectiv.

Se poate preciza dacă un punct critic este de extrem, folosind semnul diferențialei de ordinul doi.

Astfel:

dacă $d^2 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) > 0$, punctul $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ este de minim.

dacă $d^2 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) < 0$, punctul $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ este de maxim.

Exemple

1) Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

deci punctul $(1, 0)$ este punct critic pentru funcția f .

Având în vedere că $d^2 f(1, 0) = 2 \cdot dx^2 + 2 \cdot dy^2 > 0$, rezultă că punctul $(1, 0)$ este punct de minim.

2) Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$. Pentru aceasta avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

deci punctul $(-1, 0)$ este punct critic.

Având în vedere că $d^2 f(-1, 0) = 2 \cdot dx^2 - 2 \cdot dy^2$ nu are semn constant, punctul nu este de extrem.

6. Probleme rezolvate

1 Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existența limitelor:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \cdot \sin \frac{1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$; **b)** $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$; **d)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1}$.

Indicație de rezolvare:

pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, se caută $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall) x', x''$, care respectă condiția $|x'| < \delta(\varepsilon)$, $|x''| < \delta(\varepsilon)$, să se verifice $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$;

$|f(x') - f(x'')| = \left| (x')^n \cdot \sin \frac{1}{x'} - (x'')^n \cdot \sin \frac{1}{x''} \right| \leq |x'|^n + |x''|^n < 2(\delta(\varepsilon))^n$ și impunând ca

$2(\delta(\varepsilon))^n < \varepsilon \Rightarrow 0 < \delta(\varepsilon) < \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}$ și deci, conform teoremei Cauchy-Bolzano, limita există;

pentru $x' = \frac{1}{n} < \delta$ și $x'' = -\frac{1}{n}$, $|x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = 2$, deci limita nu există;

pentru $x' = \frac{1}{2n\pi}$, $x'' = \frac{2}{(2n+1)\pi} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = 1$, deci limita nu există.

2 Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \cdot \sin^2 x^2$, $x \in [0, \infty)$;

b) $f(x) = \ln x$, $x \in [\varepsilon, e]$, $\varepsilon > 0$; **c)** $f(x) = \ln x$, $x \in (0, e]$;

d) $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$; **e)** $f(x) = \frac{x}{x+1} + x$, $x \in (0, \infty)$;

f) $f(x) = \frac{x}{x+1} + x$, $x \in (-1, \infty)$.

Indicație de rezolvare:

a) pentru $x_1 = \sqrt{2n\pi}$, $x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow |x_1 - x_2| \rightarrow 0$,

dar $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, deci funcția nu este uniform continuă;

b) funcția este continuă pe interval compact, deci este uniform continuă;

c) pentru $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow |x_1 - x_2| \rightarrow 0$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2,$$

deci funcția nu este uniform continuă;

d) nu este uniform continuă;

e) pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar și pentru $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, pentru care $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow |x_1| < \delta_\varepsilon, |x_2| < \delta_\varepsilon$, se va obține:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{x_1}{x_1+1} + x_1 - \frac{x_2}{x_2+1} - x_2 \right| \leq \\ &\leq |x_1 - x_2| + \left| \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \right| < 2 \cdot |x_1 - x_2| < 2\delta_\varepsilon \end{aligned}$$

și impunând condiția $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, rezultă că funcția este uniform continuă;

f) pentru $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, dar

$|f(x_1) - f(x_2)| \rightarrow \infty$, deci funcția nu este uniform continuă.

3 Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor $f_1, f_2, f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2$ definite pe $\mathbb{R}$ prin

$$f_1(x) = x \cdot \sin^2 x^2; \quad f_2(x) = x \cdot \cos^2 x^2.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{Pentru } x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = \sqrt{n\pi} \Rightarrow |x_1 - x_2| \rightarrow 0, \text{ dar}$$

$$|f_1(x_1) - f_1(x_2)| \rightarrow \infty,$$

deci funcția f_1 nu este uniform continuă.

În mod asemănător se arată că nici funcția f_2 nu este uniform continuă.

Funcția $(f_1 + f_2)(x) = x$ și este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Se arată că funcția $f_1 \cdot f_2$ nu este uniform continuă, considerând

$$x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{4}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$

4 Se consideră funcția $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Să se calculeze limitele iterate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ și } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

5 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x} \right)^x$.

Indicație de rezolvare:

Se calculează limitele iterate și ambele sunt egale cu e^k .

6 Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că deși funcția are limite iterate în punctul $(0, 0)$, ea nu are limită în acest punct.

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x \cdot y^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^2} = 0 \text{ și}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot y^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4} \right) = 0,$$

deci limitele iterate există.

Pentru a se arăta că f nu are limită în origine, se consideră două perechi de şiruri convergente la zero, de forma:

$$(x_n, y_n), x_n = y_n^2 \text{ şi } (x_n^1, y_n^1), x_n^1 = 2 \cdot y_n^1.$$

Pentru acestea avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \text{ şi } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1, y_n^1) = \frac{2}{5},$$

deci cele două limite sunt diferite.

7 Să se arate că funcţia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Indicaţie de rezolvare:

Se demonstrează că pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pentru care $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta(\varepsilon)$, să rezulte

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon.$$

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta(\varepsilon) \Leftrightarrow |x| < \delta(\varepsilon) \text{ şi } |y| < \delta(\varepsilon).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \right| \cdot \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \\ &= \left| \frac{(x + y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^2 + y^2} \right| = |x + y| \cdot \left| 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x + y| \leq \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|y| < \delta(\varepsilon) < \varepsilon. \end{aligned}$$

8 Fie funcţia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} \cdot e^{-\frac{|x|}{y^2}}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea în punctul $(0,0)$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

de forma $x_n = y_n^2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Pentru acestea $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n^2, y_n) = \frac{1}{e} \neq 0$, deci f nu este continuă în origine.

9 Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă în raport cu x și cu y în $(0,0)$, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0) \text{ și } \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0),$$

deci f este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte.

Pentru a demonstra că f nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor, se consideră șirurile $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ și $y_n = \frac{k}{n} \rightarrow 0$, pentru k real fixat.

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{k}{1+k^2}$, limită care depinde de k , deci f nu este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

10 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru următoarele funcții:

a) $z = e^{x-y^2}$; **b)** $z = \ln(x^2 + y^2)$; **c)** $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

d) $z = \arctg \frac{y}{x}$; **e)** $z = x^y$; **f)** $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{x}{y}$;

g) $u = x^y + y^z - 2 \cdot z^x$; **h)** $u = e^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \cdot y \cdot e^{x-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

g) $\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} - 2 \cdot z^x \cdot \ln z,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot y^{z-1} + x^y \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^2 \ln y - 2x \cdot z^{x-1};$$

h) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z,$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} \cdot \sin 2z.$$

11 Pornind de la definiție, să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$ dacă $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y};$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0),$ dacă $f(x, y) = e^{\sin x \cdot y};$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1),$ dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1),$ dacă $f(x, y) = x \cdot y \cdot \ln x, \quad x \neq 0;$

e) $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, 2),$ dacă $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 \cdot y};$

f) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right),$ dacă $f(x, y) = x \cdot \sin(x + y).$

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{f(x, 0) - f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{y \rightarrow \pi/4} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}, y\right) - f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (1, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)}{x - 1},$$

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, 1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

rezultă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{x - 1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}};$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 2) = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 2) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, 2) = -\frac{1}{9};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

12 Să se arate că derivatele parțiale ale funcției:

$$\omega = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot z)$$

verifică ecuația:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}.$$

Indicație de rezolvare:

Avem identitatea

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot z = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz),$$

de unde

$$\omega = \ln(x + y + z) + \ln(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

va avea derivatele parțiale: $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{x + y + z} + \frac{2x - y - z}{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz}$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{x + y + z} + \frac{2y - x - z}{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{x + y + z} + \frac{2z - x - y}{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz}$$

care, înlocuite în ecuația dată, o verifică.

13 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în origine, dar admite derivate parțiale în origine.

Indicație de rezolvare:

Funcția f nu este continuă în origine, deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = 1 \neq f(0, 0) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

14 Pornind de la definiție, să se arate că următoarele funcții sunt diferențiabile în punctele indicate:

a) $f(x, y) = x^3 + x \cdot y + y^2$ în punctul $(1, 1)$;

b) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ în punctul $(2, 1)$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 \cdot x^2 + y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 4 \text{ și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2 \cdot y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 0. \text{ Se caută o funcție } \omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuă și nulă în punctul}$$

$(2, 1)$, pentru care:

$$f(x, y) - f(2, 1) = \omega(x, y) \cdot \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}.$$

Rezultă $\omega(x, y) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$, care este continuă pe $\mathbb{R}^2$ și $\omega(2, 1) = 0$, deci funcția f este diferențiabilă în punctul $(2, 1)$.

15 Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că f admite derivate parțiale în origine, dar f nu este diferențiabilă în acest punct.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Dacă f este diferențiabilă în punctul $(0,0)$, atunci există o funcție $\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în acest punct și care verifică:

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot (x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot (y-0) + \omega(x,y) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De aici rezultă

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot |y|}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

care nu este continuă în origine. Deci, f nu este diferențiabilă în origine.

16 Să se arate că funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

este continuă și admite derivate parțiale în origine, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

17 Să se arate că derivatele parțiale de ordinul doi mixte ale funcției

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

nu sunt continue în origine și totuși $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4 \cdot x^3 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{și}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

de unde rezultă că derivatele parțiale mixte sunt egale.

Pentru a demonstra că nu sunt continue, se consideră șirurile de numere reale, convergente la zero $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, de forma $x_n = y_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Rezultă } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot x_n^4}{(2 \cdot x_n^2)^2} = 1 \neq 0.$$

18 Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și al doilea pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = e^x \cdot \cos y$;

b) $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$.

Indicație de rezolvare:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = e^x \cdot \cos y \cdot dx - e^x \cdot \sin y \cdot dy \quad \text{și}$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy^2 = \\ &= e^x \cos y \cdot dx^2 - 2e^x \sin y \cdot dx \cdot dy - e^x \cos y \cdot dy^2; \end{aligned}$$

$$df = y \cdot z \cdot dx + x \cdot z \cdot dy + x \cdot y \cdot dz$$

și

$$d^2 f = 2 \cdot z \cdot dx dy + 2 \cdot x \cdot dy dz + 2 \cdot y \cdot dx dz.$$

19 Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiala de ordinul n pentru funcția $f(x, y) = e^{ax+by}$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) = a^k \cdot e^{ax} \cdot e^{by}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x, y) = a^k \cdot b^{n-k} \cdot f(x, y).$$

Rezultă diferențiala de ordinul n : $d^n f = e^{ax+by} \cdot (a \cdot dx + b \cdot dy)^n$.

20 Să se calculeze $df(1,1)$ și $d^2 f(1,1)$ pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = x^2 - x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x - 5 \cdot y + 7$;

b) $f(x, y) = e^{x \cdot y}$;

c) $f(x, y) = \ln x \cdot y$.

Indicație de rezolvare:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \Rightarrow df(1,1) = 4 \cdot dx - 2 \cdot dy$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d^2 f(1,1) = 2dx^2 - 2dx \cdot dy + 4dy^2; \end{aligned}$$

$$df(1,1) = e \cdot (dx + dy), \quad d^2 f(1,1) = e \cdot (dx^2 + 4dx \cdot dy + dy^2);$$

$$df(1,1) = dx + dy, \quad d^2 f(1,1) = -dx^2 - dy^2.$$

21 Să se calculeze $df(3,4,5)$, dacă $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Indicație de rezolvare:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \text{ unde } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{x \cdot z}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{y \cdot z}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ și } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

$$\text{Rezultă } df(3,4,5) = 0,04(3dx + 4dy - 5dz).$$

22 Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, știind că $f = f(u,v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, pentru funcțiile:

a) $f(u,v) = u^v$; **b)** $f(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$; **c)** $f(u,v) = \arctg \frac{u}{v}$.

Indicație de rezolvare:

a) se folosește regula de derivare a funcțiilor compuse, adică:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v';$$

b) $\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cdot (u \cdot u' + v \cdot v');$

c) $\frac{df}{dx} = \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot (v \cdot u' - u \cdot v').$

23 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcțiile:

$$f(u,v) = \ln(u^2 + v), \text{ unde } u(x,y) = e^{x+y^2}, \quad v(x,y) = x^2 + y;$$

$$f(u,v) = \arctg \frac{u}{v}, \text{ unde } u(x,y) = x \cdot \sin y, \quad v(x,y) = x \cdot \cos y.$$

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \text{ de unde rezultă:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} \cdot (u^2 + x) \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{u^2 + v} \cdot (4u^2 y + 1); \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

24 Fie $f = f(u, v)$, unde $u = x \cdot y$ și $v = \frac{x}{y}$. Să se calculeze derivatele

parțiale de ordinul doi ale funcției f .

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial v} \left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \\ &= \frac{u}{v} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Similar, se obțin rezultatele:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= uv \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v^3}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{2v^2}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

25 Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x))$, pentru:

$$\varphi(u, v) = u + uv, \quad u(x) = \cos x, \quad v(x) = \sin x;$$

$$\varphi(u, v) = e^{u-2v}, \quad u(x) = x^2, \quad v(x) = x^2 - 2;$$

$$\varphi(u, v) = u^v, \quad u(x) = \sin x, \quad v(x) = \cos x.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a) } \frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = (1+v) \cdot (-\sin x) + u \cdot \cos x = \cos 2x - \sin x;$$

$$\text{b) } \frac{df}{dx} = (-2x) \cdot e^{-x^2+4};$$

$$\text{c) } \frac{df}{dx} = (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln(\sin x)).$$

26 Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x))$, pentru:

$$\varphi(u, v, w) = uvw, \quad u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = \ln x, \quad w(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$\varphi(u, v, w) = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad u(x) = R \cos x, \quad v(x) = R \sin x, \quad w(x) = h.$$

Indicație de rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{df}{dx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} = \\ &= 2x \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\ln x}{\cos^2 x} \cdot (x^2 + 1); \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{df}{dx} = 0.$$

27 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$, unde:

$$f = \varphi(u, v), \quad u(x, y) = x + y, \quad v(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$f = \varphi(u, v), \quad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = e^{x \cdot y}.$$

Indicație de rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + yv \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + xv \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

28 Să se arate că:

a) $f(x, y) = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \cdot f;$$

b) $f(x, y) = x \cdot y + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot y + f.$$

Indicație de rezolvare:

Se consideră $u(x, y) = x^2 - y^2$, de unde rezultă că derivatele parțiale ale funcției f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \varphi' \cdot (2x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi + y \cdot \varphi' \cdot (-2y).$$

Înlocuite în ecuația dată conduc la $2y \cdot \varphi' - 2y \cdot \varphi' + \frac{\varphi}{y} = \frac{1}{y} \cdot \varphi$, deci ecuația este verificată.

29 Ce devine ecuația : $x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$,

dacă $f(x, y) = \varphi\left(xy, \frac{y}{x}\right)$?

Indicație de rezolvare:
Se consideră

$$u(x, y) = xy, \quad v(x, y) = \frac{y}{x}, \quad \text{de unde rezultă că:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2 \cdot \frac{y}{x^3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \end{aligned}$$

și ecuația devine $-2u \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$.

30 Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru:

a) $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98}$; **b)** $(0,95)^{2,01}$; **c)** $1,02 \cdot 2,01^2 \cdot 3,03^3$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră funcția $f(x, y) = x^{1/2} \cdot y^{1/3}$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,1)$ pentru $h = 0,03$ și $k = -0,02$; rezultă

$$\begin{aligned} \sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98} &= f(1+h, 1+k) = f(1,1) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \cdot k \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \cdot k^2 \right) + R_2 \approx 1,0081; \end{aligned}$$

b) se consideră funcția $f(x, y) = x^y$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2)$; rezultă $h = -0,05$, $k = 0,01$ și $f(0,95; 2,01) \approx 0,902$;

c) se consideră funcția $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2,3) \Rightarrow h = 0,02$, $k = 0,01$, $\ell = 0,03$ și $f(1,02; 2,01; 3,03) \approx 114,6159$.

31 Considerând $|x|$, $|y|$, $|z|$ suficient de mici, să se aproximeze funcția $f(x, y, z) = (1+x)^{1/2} \cdot (1+y)^{-1/2} \cdot (1+z)^{-1/2}$.

32 Să se găsească punctele de extrem local pentru funcțiile:

1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

2) $f(x, y) = 3 \cdot x \cdot y^2 - x^3 - 15 \cdot x - 36 \cdot y + 9, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

3) $f(x, y) = y^4 - 8 \cdot y^3 + 18 \cdot y^2 - 8 \cdot y + x^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

Indicație de rezolvare:

1) Se determină punctele critice, care sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y = 0 \\ 3 \cdot y^2 - 3 \cdot x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0), B(1,1) \text{ sunt punctele critice;}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3,$$

de unde rezultă, pentru punctul critic

$$A(0,0): d^2 f(0,0) = -6dx dy,$$

deci punctul nu este de extrem; pentru punctul critic

$$B(1,1): d^2 f(1,1) = 6dx^2 + 6dy^2 - 6dx dy > 0,$$

deci punctul este de minim;

2) Punctele critice sunt $A(2,3)$ și $B(-2,-3)$ și nici unul dintre acestea nu este de extrem, deoarece $\Delta_1 = -6x, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}$; rezultă $\Delta_2 < 0$, pentru ambele puncte critice, deci ele nu sunt de extrem;

3) Punctele critice sunt:

$$M_1(1 + \sqrt{2}, 2), M_2(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), M_3(1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}),$$

$$M_4(1 - \sqrt{2}, 2), M_5(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}), M_6(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3});$$

dintre acestea, M_2 și M_3 sunt puncte de minim, M_4 este punct de maxim, iar celelalte nu sunt puncte de extrem.

7. TEST DE AUTOEVALUARE

1 Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

b) $f(x, y, z) = \varphi(x \cdot y, x^2 + y^2 - z^2)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

2 Să se calculeze df și d^2f , dacă:

$f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, unde φ este de clasă C^2 ;

$f(x, y) = \varphi(x + y, x - y)$, unde φ este de clasă C^2 ;

$f(x, y, z) = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, unde φ este de clasă C^2 .

3 Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x, y) = e^{x+y}$ în punctul $(1, -1)$.

4 Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$,
 $(x, y, z) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$;

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

d) $f(x, y, z) = a \cdot x^2 - b \cdot x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

LECȚIA 2 – FUNCȚII IMPLICITE. EXTREME CONDIȚIONATE

1. Funcții implicite

Definiția 3.4.1. Fie ecuația $F(x, y) = 0$, unde $F : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. O funcție $y = f(x)$ definită pe mulțimea $A \subset \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x \in A$, $(x, f(x)) \in X$ se numește **soluție în raport cu y a ecuației $F(x, y) = 0$** pe mulțimea A , dacă $F(x, f(x)) \equiv 0$ pentru $x \in A$.

Definiția 3.4.2. Funcțiile $y = f(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor $F(x, y) = 0$ se numesc **funcții implicite** sau **funcții definite implicit**.

Observație. O ecuație $F(x, y) = 0$ poate să aibă pe A mai multe soluții sau nici una.

Exemple

Ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$ are în raport cu y o infinitate de soluții definite pe $[-1, +1]$ prin funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \alpha \leq x \leq \beta, \alpha \geq -1, \beta \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, +1] \setminus [\alpha, \beta] \end{cases}$$

deoarece fiecare verifică ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Se observă că soluțiile nu sunt continue în punctul $x = \alpha$ sau $x = \beta$.

Ecuația $x^4 + y^4 + 1 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nu are nici o soluție reală.

Ecuația $2x - 3y + 5 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ are o singură soluție, $f(x) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot x$ pe $\mathbb{R}$

Teorema 3.4.3. Fie funcția $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ și (x_0, y_0) un punct interior lui $X \times Y$. Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ sunt continue pe o vecinătate $U \times V \subset X \times Y$ a lui (x_0, y_0) ,

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, Atunci:

1) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui x_0 și o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 și există o unică funcție $y = f(x) : U_0 \rightarrow V_0$, astfel încât $f(x_0) = y_0$ și $F(x, f(x)) \equiv 0$ pentru $x \in U_0$;

2) funcția $f(x)$ are derivata continuă pe U_0 dată de:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

3) dacă $F(x, y)$ are derivatele parțiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci $f(x)$ are derivata de ordinul k continuă pe U_0 .

Definiția 3.4.4. Fie ecuația $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, unde $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ este o funcție reală de $n + 1$ variabile definită pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

O funcție $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită pe mulțimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este **soluție în raport cu** y a acestei ecuații, dacă pentru $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ avem:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0.$$

Teorema 3.4.5. Fie $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ o funcție reală definită pe $X \times Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ un punct interior lui X și y_0 un punct interior lui Y . Dacă:

- 1) $F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_0) = 0$,
- 2) funcția $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ este continuă împreună cu derivatele parțiale $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \dots, F'_{x_n}, F'_y$ pe o vecinătate $U \times V$ a punctului $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_0)$,
- 3) $F'_y(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_0) \neq 0$,

atunci:

- 1) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 și o unică funcție $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n): U_0 \rightarrow V_0$, astfel încât $f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = y_0$ și $F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0$ pentru $x \in U_0$;

- 2) funcția $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are derivate parțiale continue în raport cu x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pe U_0 date de $f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n)}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

- 3) dacă $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ are derivate parțiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci funcția implicită $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul k continue pe U_0 .

2. Dependență funcțională

Definiția 3.5.1. Fie $y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, m$, m funcții reale definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$. O funcție reală $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită pe X **depinde de funcțiile** $f_1, f_2, \dots, f_m$ pe mulțimea X , dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$ definită pe o mulțime $Y \subset \mathbb{R}^m$, astfel încât pentru $x \in X$ să avem $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Phi(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Exemplu

Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x, y, z) = x + y + z; \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad h(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Avem $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow g \equiv f^2 + 2h$, deci g depinde de funcțiile f și h .

Definiția 3.5.2. Funcțiile $y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, m$, definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ sunt **în dependență funcțională pe o mulțime** $A \subset X$, dacă cel puțin una dintre ele depinde de celelalte pe mulțimea A .

Teorema 3.5.3. Condiția necesară și suficientă pentru ca n funcții de n variabile independente $y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$, cu derivate parțiale continue pe X , să fie independente funcțional pe $A \subset X$ este ca determinantul funcțional:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să fie identic nul pe A .

Definiția 3.5.4. Funcțiile $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ se spune că sunt **independente** într-un punct $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in X$ dacă nici una din funcții nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in X$.

Funcțiile $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ sunt **independente** pe X dacă sunt independente în orice punct interior al mulțimii X .

3. Extreme condiționate

Fie $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o funcție reală definită pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ și un sistem de $p < n$ ecuații de forma:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ F_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

funcțiile reale $F_1, F_2, \dots, F_p$ fiind definite pe aceeași mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definiția 3.6.1. Extremele funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ când punctul $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ parcurge numai mulțimea A a soluțiilor sistemului (5.6.1) se numesc **extremele funcției f condiționate** de sistem.

Teorema 3.6.2. Fie funcția $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ de $n + p$ variabile definită de:

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_p \cdot F_p(x_1, \dots, x_n)$$

și $(a_1, a_2, \dots, a_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ un punct staționar liber al funcției Φ . Punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este punct staționar al funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_p = 0$.

Observație. Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ se numesc **multiplcatorii lui Lagrange**.

Pentru a determina punctele de extrem ale unei funcții $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_p = 0$ se procedează astfel:

1) se formează funcția ajutătoare:

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_p \cdot F_p(x_1, \dots, x_n);$$

2) cu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ parametri;

3) se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \\ F_1 = 0, F_2 = 0, F_p = 0 \end{cases}$$

cu $n + p$ ecuații și $n + p$ necunoscute;

4) dacă $(a_1, a_2, \dots, a_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ este o soluție a acestui sistem, punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este punct staționar condiționat al funcției $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Punctele de extrem condiționat ale funcției f se găsesc printre punctele staționare condiționate.

Pentru a stabili dacă punctele staționare condiționate sunt de extrem, se studiază diferența $f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pentru punctele care verifică sistemul $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_p = 0$, de unde rezultă că avem:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

adică se studiază diferența:

$$E = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Aplicând formula lui Taylor funcției $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ în punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, avem

$$E = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \Phi(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + R, \text{ unde } x_i - a_i = dx_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Semnul diferenței E este dat de semnul formei pătratice:

$$d^2 \Phi(a_1, \dots, a_n) = \sum \frac{\partial^2 \Phi(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

4. Probleme rezolvate

3.7.1 Să se calculeze $f'(1)$, $f''(1)$ pentru funcția implicită $y = f(x)$, definită prin ecuația $(x^2 + y^2)^3 - 3 \cdot (x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiția $f(1) = 1$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră funcția $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3 \cdot (x^2 + y^2)$ definită pe $\mathbb{R}^2$. Pentru ea există derivatele parțiale de ordinul întâi de forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x \cdot (x^2 + y^2)^2 - 6x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6y \cdot (x^2 + y^2)^2 - 6y.$$

Pentru un punct $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, pentru care $F(x_0, y_0) = 0$ și $y_0 \neq 0$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$, se verifică ipotezele din teorema funcțiilor implicite și putem scrie:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{x}{y} \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{\partial f'(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y} \right) = -\frac{y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{1}{y^2} \left(y + \frac{x^2}{y} \right) \Rightarrow f''(1) = -2.$$

3.7.2 Se consideră funcția $y = f(x)$ definită implicit prin relația $x^2 + y^2 + 2 \cdot a \cdot x \cdot y = 0$, $a > 1$. Să se arate că $f''(x) = 0$.

Indicație de rezolvare:

Fie $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2 \cdot a \cdot x \cdot y$, $a > 1$, definită pe $\mathbb{R}^2$.

Există $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x + 2ay$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y + 2ax$.

Fie un punct $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, astfel încât $F(x_0, y_0) = 0$ și pentru care $y_0 + ax_0 \neq 0$. Derivatele parțiale de ordinul I ale lui F sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, deci și pe o vecinătate $U \times V$ a punctului $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ și $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Astfel sunt îndeplinite condițiile din teorema funcțiilor implicite și este asigurată existența funcției $f: U_0 \rightarrow V_0$, $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ și a derivatei sale.

Deoarece $y = f(x)$ trebuie să verifice $x^2 + y^2 + 2 \cdot a \cdot x \cdot y = 0$, $a > 1$, rezultă că $x^2 + f^2(x) + 2a \cdot x \cdot f(x) = 0$. Derivând aceasta, vom obține:

$$2 \cdot x + 2f(x) \cdot f'(x) + 2a \cdot f(x) + 2a \cdot x \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{x + a \cdot f(x)}{a \cdot x + f(x)}.$$

Derivând ultima relație obținută, rezultă:

$$f''(x) = \frac{a^2 - 1}{[a + f(x)]^3} \cdot [x^2 + f^2(x) + 2a \cdot x \cdot f(x)] = 0 \Rightarrow f''(x) = 0.$$

3.7.3 Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile implicite $y = f(x)$ definite prin:

1) $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 = 0;$

2) $x^3 + y^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y - 3 = 0;$

3) $y^2 + 2 \cdot y \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0;$

Indicație de rezolvare:

$$1) \quad f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4}, \text{ unde s-a considerat}$$

$$F(x, y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1.$$

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0; \\ x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

care are soluțiile $A(1, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

În același timp,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x - 2y - 2}{2x - 10y - 4} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - y - 1}{x - 5y - 2} \right) = \\ &= \frac{(1 - f'(x))(x - 5f(x) - 2) - (x - f(x) - 1)(1 - 5f'(x))}{(x - 5f(x) - 2)^2} \Rightarrow f''(1) = -1 < 0, \end{aligned}$$

deci punctul 1 este de maxim, iar $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$, deci punctul $\frac{1}{2}$ este de minim.

$$2) \quad f'(x) = -\frac{3x^2 - 6xy}{3y^2 - 3x^2} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0 \\ x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, \sqrt[3]{3}), B(-2, -1)$$

sunt soluțiile sistemului;

$$f''(x) = \frac{2y^3 + 2x^2y - 2xy^2 + 2x(x \cdot y - x^2 - y^2) \cdot y'}{(x^2 - y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \quad f''(-2) = -\frac{2}{3},$$

deci 0 este punct de minim, iar -2 este punct de maxim;

3) fie

$$F(x, y) = y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2xy - 2}{y + x^2},$$

de unde se obține sistemul:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile $A(-1, -1)$, $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$;

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(f(x) + xf'(x))(f(x) + x^2) - (xf(x) - 1)(f'(x) + 2x)}{(f(x) + x^2)^2}$$

și deoarece $f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, rezultă că punctul $x = \frac{1}{2}$ este de maxim. Punctul $x = -1$ nu este de extrem, deoarece diferențiala de ordinul doi a lui F este $d^2F(-1, -1) = -4dx^2 - 2dy^2 - 8xdxdy$ nu păstrează semn constant;

3.7.4 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ pentru funcția $z = f(x, y)$ definită

implicit prin $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$, satisfăcând condiția $f(1, 0) = 0$.

Indicație de rezolvare:

Fie funcția $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$ definită pe $\mathbb{R}^3$.

Rezultă: $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \cos y - z \cdot \sin x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \cos z - x \cdot \sin y$,

$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \cos x - y \cdot \sin z$ și sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

Se consideră punctul $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Astfel, funcția F și derivatele sale parțiale de ordinul I sunt continue într-o vecinătate a lui $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, fiind îndeplinite condițiile din teorema funcțiilor

implicite și putem scrie: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$,

de unde rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x},$$

$$\text{deci } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}.$$

3.7.5 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcției implicite $z = f(x, y)$, definite prin:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$

Indicație de rezolvare:

a) fie $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, se scriu derivatele parțiale de ordinul I ale lui F , care sunt continue pe $\mathbb{R}^3$ și se consideră un punct $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; astfel, funcția F și derivatele sale parțiale de ordinul I sunt continue și pe o vecinătate a lui $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ și sunt verificate condițiile din teorema funcțiilor implicite, rezultă:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z} \right) = \frac{c^4}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{(y^2 - b^2)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z} \right) = \frac{c^4}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{(x^2 - a^2)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z} \right) = -\frac{c^4}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{x \cdot y}{z^3};$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - 1}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 1}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x \cdot y}{z^3}.$$

3.7.6 Să se calculeze dz , d^2z pentru funcția implicită $z = f(x, y)$ definită prin:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

Indicație de rezolvare:

Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, derivatele sale parțiale de ordinul I sunt $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y$ și $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z$, care sunt continue pe $\mathbb{R}^3$; se consideră un punct $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $z \neq 0$; funcția F și derivatele sale parțiale de ordinul I sunt continue și pe o vecinătate a lui $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, fiind astfel verificate condițiile din teorema funcțiilor implicite; rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{z};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{1}{z} \cdot (x \cdot dx + y \cdot dy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{z} \right) = \frac{y^2 - a^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{z} \right) = \frac{x^2 - a^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{z} \right) = -\frac{xy}{z^3},$$

de unde se obține:

$$d^2 z = \frac{y^2 - a^2}{z^3} \cdot dx^2 - 2 \frac{xy}{z^3} \cdot dx \cdot dy + \frac{x^2 - a^2}{z^3} \cdot dy^2.$$

3.7.7 Funcțiile $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ sunt definite implicit prin relațiile

$$u + v = x + y, \quad x \cdot u + y \cdot v = 1. \text{ Să se calculeze } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Indicație de rezolvare:

Derivând în raport cu x cele două relații, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u + v) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot u + y \cdot v) = u + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u + y}{y - x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u + x}{x - y}. \end{aligned}$$

$$\text{Derivând cele două relații în raport cu } y, \text{ obținem: } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v + y}{y - x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v + x}{x - y}.$$

3.7.8 Fie funcția compusă $z = f(x, y)$, definită de $z = u^3 + v^3$, în care funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sunt definite implicit prin relațiile $u + v^2 = x$, $u^2 + v^2 = y$. Să se calculeze

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Indicație de rezolvare:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

Diferențiind relațiile de definiție, obținem:

$$du + 2 \cdot v \cdot dv = dx, \quad 2 \cdot u \cdot du + 2 \cdot v \cdot dv = dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{1-2u}(dx - dy), \quad dv = -\frac{u}{v(1-2u)} \cdot dx + \frac{1}{2v(1-2u)} \cdot dy.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1-2u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1-2u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u}{v(1-2u)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2v(1-2u)}$$

și deci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3u(u-v)}{1-2u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{(1-2u)} \cdot \left(-3 \cdot u^2 + \frac{3}{2} \cdot v \right).$$

3.7.9 Să se calculeze dz , dacă $z = u \cdot v$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$.

Indicație de rezolvare:

$$dz = d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Diferențiind relațiile care definesc pe $u(x, y)$ și $v(x, y)$, obținem:

$$dx = (du + dv) \cdot e^{u+v}, \quad dy = (du - dv) \cdot e^{u-v}.$$

Rezultă $du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy \right)$, $dv = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy \right)$, de unde:

$$dz = \frac{1}{2x}(u+v)dx + \frac{1}{2y}(v-u)dy.$$

3.7.10 Fie funcția $z = f(x, y)$ definită implicit prin $z \cdot e^z = x \cdot e^x + y \cdot e^y$. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, dacă $u = \frac{x+z}{y+z}$.

Indicație de rezolvare:

Diferențiind relația de definiție a funcției implicite $z = f(x, y)$, obținem:

$$(z+1) \cdot e^z \cdot dz = (x+1) \cdot e^x \cdot dx + (y+1) \cdot e^y \cdot dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dz = \frac{x+1}{z+1} \cdot e^{x-z} \cdot dx + \frac{y+1}{z+1} \cdot e^{y-z} \cdot dy.$$

În același timp avem

$$du = d\left(\frac{x+z}{y+z}\right) = \frac{(y+z)(dx+dz) - (x+z)(dy+dz)}{(y+z)^2} =$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2} \left\{ \left[(y+z) + (y-x) \frac{x+1}{z+1} \cdot e^{x-z} \right] \cdot dx + \left[-(x+z) + (y-z) \frac{y+1}{z+1} \cdot e^{y-z} \right] \cdot dy \right\}.$$

Rezultă: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{(y+z)^2} \left[(y+z) + (y-x) \frac{x+1}{z+1} \cdot e^{x-z} \right]$

și $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{(y+z)^2} \left[-(x+z) + (y-z) \frac{y+1}{z+1} \cdot e^{y-z} \right].$

3.7.11 Fie funcțiile $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x - y + z$ și $h(x, y, z) = 4 \cdot (x \cdot y + y \cdot z)$ definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se cerceteze dependența funcțională a acestor funcții.

Indicație de rezolvare:

Matricea funcțională a lui Jacobi:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4(x+z) & 4y \end{pmatrix}$$
 are

rangul doi, deci cele trei funcții sunt dependente funcțional. Două dintre funcții, f și g , sunt independente funcțional, iar a treia, h , este dependentă funcțional de acestea.

3.7.12 Să se cerceteze dependența funcțională a funcțiilor:

a) $y_1 = \frac{a \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, y_2 = \frac{b \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ definite pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

b) $y_1 = x + y + z, y_2 = x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot y - y \cdot z - x \cdot z$

și

$y_3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot z$ definite pe $\mathbb{R}^3$;

c) $y_1 = \frac{1}{(x-y)(x-z)}, y_2 = \frac{1}{(y-z)(y-x)}, y_3 = \frac{1}{(z-x)(z-y)}, x \neq y \neq z$

Indicație de rezolvare:

a) Matricea lui Jacobi este: $\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} ay^2 & -axy \\ -bxy & bx^2 \end{pmatrix}$ și are rangul 1;

funcțiile sunt dependente funcțional: $\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1$;

b) $y_3 = y_1 \cdot y_2$;

c) $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

5.7.13 Să se determine extremele funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - y - x$ condiționate de $x + y = 1$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră funcția lui Lagrange:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y), \text{ unde } g(x, y) = x + y - 1.$$

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - y - x + \lambda \cdot (x + y - 1).$$

Se rezolvă sistemul de forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2 \cdot x - 1 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2 \cdot y - 1 + \lambda = 0; \\ x + y = 1, \end{cases}$$

de unde se obțin soluțiile: $\lambda = 0, x = y = \frac{1}{2}$.

Deoarece $d^2 L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot dx^2 + 2 \cdot dy^2 > 0$, punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este de minim.

3.7.14 Să se determine extremele legate pentru funcțiile:

a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b > c > 0$;

c) $f(x, y, z) = x + 2y - 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 16$;

d) $f(x, y, z) = x + y + z, x - y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

Indicație de rezolvare:

a) Se consideră $L(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ și se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot \lambda \cdot x = 0 \\ -2 + 2 \cdot \lambda \cdot y = 0 \\ 2 + 2 \cdot \lambda \cdot z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2};$$

se obțin punctele $A(1, -2, 2)$, $B(-1, 2, -2)$ și se determină

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2,$$

de unde rezultă că punctul A este de maxim, iar B de minim;

b) $\lambda_1 = -a^2 \Rightarrow A(a, 0, 0)$, $B(-a, 0, 0)$ sunt puncte de maxim,

$\lambda_2 = -c^2 \Rightarrow C(0, 0, c)$, $D(0, 0, -c)$ sunt puncte de minim;

c) $\lambda_1 = -\frac{3}{8} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ este punct de maxim;

$\lambda_2 = \frac{3}{8} \Rightarrow B\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ este punct de minim;

d) Se consideră

$$L(x, y, z) = x + y + z + \lambda(x - y + z - 2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

și se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda + 2\mu \cdot x = 0 \\ 1 - \lambda + 2\mu \cdot y = 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu \cdot z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda + 1}{2\mu}; \\ y = \frac{\lambda - 1}{2\mu}; \\ z = -\frac{\lambda + 1}{2\mu}; \end{cases}$$

rezultă $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ punct de maxim și $\lambda_2 = -1$, $\mu_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$B(0, -2, 0)$ punct de minim.

5. Schimbări de variabile și de funcții. Probleme rezolvate

3.7.15 Ce devin ecuațiile următoare dacă se fac schimbările de variabilă indicate?

a) $x^3 \cdot y''' + x \cdot y' - y = 0$, $x = e^t$;

b) $(x+1)^3 \cdot y'' + 3(x+1)^2 \cdot y' + (x+1) \cdot y = \ln(x+1)$, $\ln(x+1) = t$;

c) $(1-x^2) \cdot y'' - x \cdot y' + \omega^2 \cdot y = 0$, $x = \cos t$;

d) $(1+x^2)^2 \cdot y'' + 2x(1+x^2) \cdot y' + y = 0$, $x = \operatorname{tg} t$;

Indicație de rezolvare:

a)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}, \quad y'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \right) \cdot e^{-t} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot e^{-2t};$$

$$y''' = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \cdot e^{-2t} \right] \cdot e^{-t} = \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \cdot e^{-3t};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se va obține noua ecuație:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} - y = 0;$$

b) $\ln(x+1) = t \Rightarrow x+1 = e^t \Rightarrow x = e^t - 1;$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot e^{-2t} - \frac{dy}{dt} \cdot e^{-2t};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se obține noua ecuație:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = t \cdot e^{-t};$$

c) $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 \cdot y = 0;$

d) $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0;$

3.7.16 Ce devin ecuațiile următoare dacă se schimbă funcția după cum urmează:

a) $x \cdot y' - y(\ln x \cdot y - 1) = 0, \quad y = \frac{z}{x};$

b) $x^2 \cdot y'' + 4x \cdot y' + (2 - x^2) \cdot y = 4x, \quad y = \frac{z}{x^2};$

Indicație de rezolvare:

a) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{z}{x} \right) = \frac{z' \cdot x - z}{x^2} \Rightarrow x \cdot z' - z \ln z = 0;$

b) $z'' - z = 4x;$

3.7.17 În ecuația $y''(1+y^2) - 2(1+y) \cdot (y')^2 - (1+y^2) = 0$, unde y este o funcție de x , se face schimbarea $y = \operatorname{tg} z$. Să se găsească ecuația verificată de $z(x)$.

Răspuns: $z'' - 2(z')^2 - \cos^2 z = 0$.

3.7.18 Ce devin următoarele ecuații dacă se schimbă rolul variabilelor?

a) $y'' + x \cdot (y')^3 = 0$;

b) $y'' - (y')^2 + 2x \cdot (y')^3$.

Indicație de rezolvare:

a) $y' = \frac{1}{x'}, y'' = -\frac{x''}{(x')^3} \Rightarrow x'' - x = 0$ este noua ecuație;

b) $x'' + x' - 2x = 0$.

3.7.19 În ecuațiile care urmează să se facă schimbările indicate la fiecare

a) $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 + y^2 = 0$, $\begin{cases} x = e^t; \\ y = e^u, \end{cases} u = u(t)$;

b) $2 \cdot y'' + (x+y)(1-y')^3 = 0$, $\begin{cases} x - y = u; \\ x + y = v(u); \end{cases}$

c) $(1-x^2) \cdot y'' - 3 \cdot x \cdot y' + (a^2-1) \cdot y = 0$, $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \frac{z}{\cos t}, \end{cases} z = z(t)$;

Indicație de rezolvare:

a) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(e^u) \cdot \frac{1}{\frac{d}{dt}(e^t)} = e^{u-t} \cdot u'$;

$$y'' = \frac{d}{dt}(e^{u-t} \cdot u') \cdot e^{-t} = e^{u-2t} \cdot [u'' + (u')^2 - u'];$$

efectuând înlocuirile, obținem ecuația: $u'' - u' + e^t = 0$;

b) $v'' + v = 0$;

c) $z'' + a^2 \cdot z = 0$;

3.7.20 Luând u și v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuații:

a) $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $u = x$, $v = x^2 + y^2$;

b) $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, $u = x$, $v = \frac{y}{x}$;

$$\text{c) } (x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y};$$

rezultă că $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \cdot x \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot y \frac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ este ecuația transformată;

$$\text{b) } u \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0;$$

c)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

3.7.21 Luând pe u și v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuații:

$$\text{a) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = 3 \cdot x + y, \quad v = x + y;$$

$$\text{b) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \begin{cases} u = \sin x + x - y; \\ v = x - \sin x + y; \end{cases}$$

$$\text{c) } x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{x}{y} = u, \quad x \cdot y = v;$$

$$\text{d) } x \cdot y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x, \quad v = \frac{y}{x};$$

$$\text{e) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = 2 \cdot x + y, \quad v = y.$$

Indicație de rezolvare:

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 3 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(3 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(3 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \\
&= 9 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Înlocuind, se obține ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$;

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$;

c) $2 \cdot v \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} = 0$;

d) $v \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$;

e) $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

6. TEST DE AUTOEVALUARE

1 Să se determine extremele funcției $z = f(x, y)$, definită implicit prin:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot z - y \cdot z + 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 2 = 0$.

2 Să se arate că funcțiile:

$$y_1 = x + y + z, \quad y_2 = x^3 + y^3 + z^3 + 6 \cdot x \cdot y \cdot z$$

și

$$y_3 = x \cdot y(x + y) + y \cdot z(y + z) + z \cdot x(z + x)$$

sunt dependente funcțional pe $\mathbb{R}^3$. Care este relația de dependență?

3 Să se determine extremele funcției $f(x, y)$ cu legăturile indicate:

a) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$;

c) $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2, \quad x^2 - y^2 = 1$;

d) $f(x, y) = x \cdot y, \quad x + y = 1$;

e) $f(x, y) = x + 2 \cdot y, \quad x^2 + y^2 = 5$.

4 Să se determine valoarea maximă și valoarea minimă pentru:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1$;

b) $f(x, y) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$.

5 Să se transforme în coordonate polare, făcând înlocuirile: $x = r \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \theta$, următoarele expresii:

a) $E = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$;

b) $E = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$;

c) $E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

d) $E = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot x \cdot y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

7. TEMĂ DE CONTROL

1 Să se scrie formula lui Taylor pentru:

a) $f(x, y) = -x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y - 4$ în punctul $(-2, 1)$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot x \cdot y - y \cdot z - 4 \cdot x - 3 \cdot y - z + 4$

în punctul $(1, 1, 1)$.

2 Să se determine extremele funcției:

a) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12 \cdot x \cdot y + 2 \cdot z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot (7 - x - 2 \cdot y - 3 \cdot z), x \cdot y \cdot z \neq 0$;

c) $f(x, y, z) = (x + z^2) \cdot e^{x(y^2 + z^2 + 1)}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3 Să se arate că dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y + z) \cdot \sin z - y \cdot (x + z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația:

$$z \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4 Fie funcțiile

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2, g(x, y, z) = 2 \cdot x + y - 2 \cdot z$$

și

$$h(x, y, z) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x \cdot z - 18 \cdot z \cdot y$$

definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se arate că:

funcțiile f, g și h nu sunt independente în origine;

există o vecinătate a punctului $M_0(-1, 0, 1)$ pe care f depinde de g și h .

5 Presupunând pe u și v ca noi variabile independente și pe w ca o nouă funcție, să se transforme în noile variabile următoarele ecuații:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) \cdot z, \text{ dacă } \begin{cases} u = x^2 + y^2; \\ v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \\ w = \ln z - (x + y); \end{cases}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \text{ dacă } \begin{cases} u = x; \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}; \\ w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}; \end{cases}$$

$$(x \cdot y + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y \cdot z, \text{ dacă } \begin{cases} u = y \cdot z - x; \\ v = x \cdot z - y; \\ w = x \cdot y - z; \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}, \text{ dacă } \begin{cases} u = \frac{x}{y}; \\ v = x; \\ w = x \cdot z - y; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ dacă } \begin{cases} u = x + y; \\ v = x - y; \\ w = x \cdot y - z. \end{cases}$$

6 Ce devine expresia $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ în coordonate sferice $x = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta$, $z = r \cdot \cos \varphi$?

8. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 2

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
2. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
3. **M. Craiu, M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
4. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră și analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978, 1979
5. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academiei Militare, București, 1976
6. **P. Flondor, O. Stănășilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
7., *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
8. **E. Popescu**, *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1998
9. **M. Roșculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973
10. **M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
11. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2001
12. **O. Stănășilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
13. **I. Sprințu, V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferențial și integral*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2003