

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 3 –

INTEGRALE IMPROPRII. INTEGRALE CU PARAMETRII

Obiective urmărite:

1. Însușirea noțiunilor fundamentale și a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor din domeniul integralelor improprii și al integralelor cu parametri;
2. Formarea și dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale și de specialitate din anii superiori;
3. Formarea și dezvoltarea deprinderilor și aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă și argumentare fundamentată în soluționarea problemelor de natură matematică și de specialitate, precum și formarea și dezvoltarea unui raționament riguros și a abilităților de calcul rapid și corect necesare pentru diferite aplicații.
4. Formarea și dezvoltarea capacităților de abstractizare, generalizare și sinteză;
5. Aplicarea analizei matematice în alte domenii ale științei și practicii.

Rezumat:

În această unitate de învățare sunt prezentate, pe parcursul a două lecții, principalele noțiuni teoretice referitoare la integralele improprii de tipul I și II și la integralele cu parametri pe interval compact, respectiv la integrale improprii cu parametri, precum și algoritmii cei mai des întâlniți pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestei unități de învățare.

După parcurgerea celor două lecții din cuprinsul unității de învățare studenții vor dobândi cunoștințele teoretice și își vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaște, înțelege și rezolva probleme specifice referitoare la :

- noțiunea de convergență a unei integrale improprii și tipurile de integrale improprii;
- criterii de convergență pentru integrale improprii (din funcții pozitive, din funcții oarecare);
- legătura integralelor improprii cu seriile numerice;
- integrale cu parametri pe interval compact și integrale improprii cu parametri;
- noțiunile de convergență simplă și uniformă pentru integrale improprii cu parametri;
- criterii de convergență simplă și uniformă pentru integrale improprii cu parametri;
- proprietățile de continuitate, derivabilitate, integrabilitate și existență a primitivelor pentru o funcție definită printr-o integrală cu parametru;
- integralele euleriene de prima și a doua speță: definiții, proprietăți, formule de calcul, relații de legătură, aplicații.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecții sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule și algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noțiunilor teoretice și algoritmilor de rezolvare prezentați anterior;
- în finalul fiecărei lecții este propus un test de autoevaluare și la sfârșitul unității de

învățare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate, ordonate după gradul lor de dificultate și acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învățare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unității de învățare, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exercițiu se recomandă identificarea algoritmului și descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluțiilor problemelor rezolvate și rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare și în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

- integrale improprii de speța I și II, integrale improprii convergente, divergente, absolut convergente, semiconvergente;
- integrale cu parametri pe interval compact, integrale improprii cu parametri, integrale euleriene de speța I și II.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii și însușirii noțiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare și dobândirii competențelor anunțate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecție, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare și a Temelor de control.

LECȚIA 1 - INTEGRALE IMPROPRII

1. Definiții și proprietăți ale integralelor improprii

Este cunoscută noțiunea de integrală definită $\int_a^b f(x) dx$, unde $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită pe $[a, b]$.

Există probleme care conduc la extinderea noțiunii de integrală definită.

Fie, astfel, $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = e^{-x}$. Aria porțiunii din plan cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x = u$, $y = 0$ și graficul funcției f este dată de relația $\int_0^u e^{-x} dx = 1 - e^{-u}$.

Rezultă, în mod natural, aria cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y = 0$ și graficul funcției f , de forma: $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - e^{-u}) = 1$.

Dacă $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, atunci aria cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x = u$, $y = 0$ și graficul funcției f va fi $\int_1^u \frac{1}{x} dx = \ln u$. În acest caz, nu se mai poate da un sens natural noțiunii de arie a porțiunii plane cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y = 0$ și graficul lui f , deoarece $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln u = +\infty$.

Astfel de probleme conduc la studiul existenței unor limite de forma $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) dx$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(x) dx$.

Definiția 6.1.1. Fie $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, +\infty)$ și fie $F(u) = \int_a^u f(x) dx$. Funcția f este **integrabilă** pe $[a, +\infty)$, dacă

există $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u)$ și este finită. Notăție. $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Observația 6.1.2. Dacă funcția f este integrabilă pe $[a, +\infty)$, spunem că **integrala** $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ este **convergentă**. În caz contrar, integrala este **divergentă**.

Observația 6.1.3. În mod asemănător se definesc integralele

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) dx$$

și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx.$$

Definiția 6.1.4. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact

$[a, u] \subset [a, b)$ și fie $F(u) = \int_a^u f(x) dx$. Funcția f este **integrabilă** pe $[a, b)$, dacă există

$$\lim_{u \nearrow b} F(u) \text{ și este finită. Notăție. } \lim_{u \nearrow b} F(u) = \int_a^{b-0} f(x) dx.$$

Observația 6.1.5. Dacă f este integrabilă pe $[a, b)$, spunem că **integrala** $\int_a^{b-0} f(x) dx$ este **convergentă**. În caz contrar, ea este **divergentă**.

Observația 6.1.6. În mod asemănător se definesc integralele $\int_{a+0}^b f(x) dx = \lim_{u \searrow a} \int_u^b f(x) dx$ și $\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx$.

Observație. Integralele

$$\int_a^\infty f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_{-\infty}^\infty f(x) dx, \int_a^{b-0} f(x) dx, \int_{a+0}^b f(x) dx$$

se numesc **integrale improprii**.

Exemplu:

$$\text{Fie } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & \text{pentru } x \in [0, 1); \\ 0, & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{u \nearrow 1} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{u \nearrow 1} 2(1 - \sqrt{1-u}) = 2.$$

Rezultă că funcția f este integrabilă pe $[0, 1)$, dar nu este integrabilă pe $[0, 1]$, deoarece f este nemărginită în $x = 1$.

Definiția 6.1.7. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$ și fie $F(u) = \int_a^u f(x) dx$. Funcția f este **integrabilă** pe $[a, b)$, dacă

există $\lim_{u \nearrow b} F(u)$ și este finită.

Notăție. $\lim_{u \nearrow b} F(u) = \int_a^b f(x) dx$.

Teorema 6.1.8. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă $a < c < b$, atunci integralele $\int_a^b f(x) dx$ și $\int_c^b f(x) dx$ au aceeași natură.

Teorema 6.1.9. Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă integralele $\int_a^b f(x) dx$ și $\int_a^b g(x) dx$ sunt convergente, atunci și integrala $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este convergentă.

Criteriul lui Cauchy-Bolzano

Fie $F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit). $\lim_{u \nearrow b} F(u)$ există și este finită dacă și numai dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) b_0(\varepsilon) \in (a, b)$, astfel încât pentru orice u', u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$.

Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă dacă și numai dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) b_0(\varepsilon) \in (a, b)$, astfel încât pentru orice u', u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem $\left| \int_{u'}^{u''} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Definiția 6.1.10. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Integrala $\int_a^b f(x) dx$ se numește **absolut convergentă**, dacă $\int_a^b |f(x)| dx$ este convergentă.

Teorema 6.1.11. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă integrala $\int_a^b f(x) dx$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Definiția 6.1.12. O integrală improprie se numește *semiconvergentă*, dacă ea este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Definiția 6.1.13. i) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ se numește *convergentă în sensul valorii principale Cauchy*, dacă și numai dacă există

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} f(x) dx \in \mathbb{R} \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} f(x) dx ;$$

ii) Fie $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a < c < b$ continuă. Integrala improprie $\int_a^b f(x) dx$ se numește *convergentă în sensul valorii principale Cauchy*, dacă și numai dacă

$$\text{există } \lim_{u \searrow 0} \left[\int_a^{c-u} f(x) dx + \int_{c+u}^b f(x) dx \right] \in \mathbb{R} \text{ și avem}$$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u \searrow 0} \left[\int_a^{c-u} f(x) dx + \int_{c+u}^b f(x) dx \right].$$

2. Integrale improprii din funcții pozitive

Teorema 6.2.1 (Criteriul de comparație I). Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Dacă se verifică:

i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $(\forall) x \in [a, b)$ și

ii) $\int_a^b g(x) dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă.

Corolar 6.2.2. Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Dacă se verifică:

i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $(\forall) x \in [a, b)$ și

ii) $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă, atunci $\int_a^b g(x) dx$ este divergentă.

Teorema 6.2.3 (Criteriul de comparație II). Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Dacă se verifică:

i) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $(\forall) x \in [a, b)$;

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0, \quad A \neq \infty,$$

atunci integralele $\int_a^b f(x) dx$ și $\int_a^b g(x) dx$ au aceeași natură.

Observația 6.2.4. Un rol important în utilizarea criteriilor de comparație I și II îl au integralele $I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ și $I_2 = \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Natura integralei I_1 :

$$\begin{aligned} \text{Pentru } \alpha \neq 1, \quad I_1 &= \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \lim_{u \nearrow b} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^u = \\ &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha < 1; \\ +\infty, & \text{pentru } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Pentru } \alpha = 1, \quad I_1 = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u \frac{dx}{b-x} = - \lim_{u \nearrow b} \ln(b-x) \Big|_a^u = +\infty.$$

Rezultă că I_1 este convergentă pentru $\alpha < 1$ și divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

Natura integralei I_2 : Pentru $\alpha \neq 1$,

$$I_2 = \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{u \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} \Big|_a^u = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha > 1; \\ \infty, & \text{pentru } \alpha < 1. \end{cases}$$

$$\text{Pentru } \alpha = 1, \quad I_2 = \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln u - \ln a) = \infty.$$

Rezultă că integrala I_2 este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 6.2.5. Fie $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a > 0$, integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, +\infty)$. Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot f(x) = A$, atunci:

- i) dacă $\alpha > 1$ și $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ este convergentă;
- ii) dacă $\alpha \leq 1$ și $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ este divergentă.

Exemplu:

Fie $I = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}} dx$. Se consideră funcția $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}}$ și se calculează

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha \cdot \ln x}{x^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^3} + 1}} = 0 \text{ pentru un } \alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon > 1, \text{ deci integrala este}$$

convergentă.

Teorema 6.2.6. Fie $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$, integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha \cdot f(x) = A$, atunci:

- i) dacă $\alpha < 1$ și $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă;
- ii) dacă $\alpha \geq 1$ și $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă.

Exemplu:

Fie $I = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Funcția $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ este nemărginită în $x = 1$.

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^\alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2} < 1, \text{ deci}$$

integrala este convergentă.

3. Integrale improprii din funcții oarecare

Criteriul lui Dirichlet

Fie $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

- i) funcția f este continuă și admite o primitivă F mărginită pe $[a, +\infty)$;
- ii) funcția g are derivata continuă pe $[a, +\infty)$;
- iii) funcția g este monoton descrescătoare pe $[a, +\infty)$;
- iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$,

atunci $\int_a^{\infty} f(x) \cdot g(x) dx$ este convergentă.

Exemple:

- 1) Integrala $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$ este convergentă, deoarece verifică cerințele

Criteriului lui Dirichlet, pentru $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

2) Integralele lui Fresnel $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$, $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ sunt convergente.

$$\text{Demonstrație. } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^1 \sin x^2 dx + \int_1^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Integrala $\int_0^1 \sin x^2 dx$ este pe un interval compact. Pentru studiul convergenței

integralei improprie $\int_1^{\infty} \sin x^2 dx$, se face schimbarea de variabilă $x^2 = t$ și avem

$$\int_1^{\infty} \sin x^2 dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \sin x^2 dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^{u^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \text{ iar integrala } \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

verifică cerințele Criteriului lui Dirichlet, deci este convergentă.

Similar se demonstrează convergența integralei $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$.

4. Integrale improprie și serii numerice

Fie $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$ și fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_n < \dots < b$ un șir cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Se definește seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x) dx$.

Teorema 6.4.1. Dacă integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă, atunci și seria numerică

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x) dx \text{ este convergentă și are loc egalitatea: } \int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x) dx.$$

Observații:

1) Pentru $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$, atunci este adevărată și reciproca teoremei 6.4.1.

2) Dacă $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nu păstrează semn constant pe $[a, b)$, atunci reciproca teoremei 6.4.1 nu se verifică întotdeauna.

Exemplu:

$$\text{Seria } \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x dx = - \sum_{k=0}^{\infty} \cos x \Big|_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} = 0, \text{ deci este convergentă.}$$

În același timp, integrala $\int_0^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \sin x \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - \cos u)$, care nu există.

Criteriul integral al lui Cauchy

Fie funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, descrescătoare. Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă, dacă și numai dacă $\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ este convergentă.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeași natură cu integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \, dx$.

5. Probleme rezolvate

1 Să se studieze convergența și, în caz afirmativ, să se calculeze următoarele integrale improprii:

a) $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx$, $\lambda > 0$; b) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \, dx$; c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

d) $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} \, dx$; e) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx$; f) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$;

g) $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$; h) $\int_1^{\infty} x \cdot \cos x^2 \, dx$; i) $\int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \, dx$;

j) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}} \, dx$, $\alpha > 0$; k) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \, dx$, $\alpha > 0$;

l) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cdot \sin x \, dx$, $a > 0$; m) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} \, dx$;

n) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; o) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.

Indicație de rezolvare:

a) $I = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-\lambda x} \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^u = \frac{1}{\lambda}$, deci integrala este convergentă;

b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi^2}{8}$; e) $I = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) \Big|_0^u = \infty$, deci

integrala este divergentă; f) divergentă; g) divergentă; h) divergentă;

$$\begin{aligned} \text{i) } I &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_1^u = 1 - \cos 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } I &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u x^{-1-\alpha} \cdot \ln x dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{(x^{-\alpha})'}{(-\alpha)} \cdot \ln x dx = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \Big|_1^u - \int_1^u \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{u^\alpha} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}; \end{aligned}$$

k) $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$;

$$\begin{aligned} \text{l) } I &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-ax} \cdot \sin x dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-ax} \cdot (-\cos x)' dx = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-e^{-ax} \cdot \cos x \Big|_0^u + \int_0^u (e^{-ax})' \cdot \cos x dx \right) = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-e^{-ax} \cdot \cos x \Big|_0^u - a \cdot \int_0^u e^{-ax} \cdot \cos x dx \right) = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - e^{-au} \cdot \cos u - a \cdot e^{-au} \cdot \sin u - a^2 \cdot I); \end{aligned}$$

rezultă astfel că $I = \frac{1}{1+a^2}$;

$$\text{m) } I = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \int_{-u}^u \frac{(x^2)'}{1+x^4} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x^2 \Big|_{-u}^u = 0;$$

$$\text{n) } I = \lim_{u \searrow -1} \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \searrow -1} \arcsin x \Big|_u^0 = \lim_{u \searrow -1} (-\arcsin u) = \frac{\pi}{2}; \text{ o) } I = \frac{1}{\ln 2}.$$

2 Să se studieze convergența integralelor:

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; d) $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}$;
e) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$; f) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; g) $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$;
h) $\int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$; i) $\int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$, $a \geq 0$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$; se calculează

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha} \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^4} = 1$ pentru $\alpha = 4 > 1$, deci conform teoremei 6.2.5 integrala este convergentă;

b) convergentă;

c) se consideră funcția $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ și se calculează

$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\alpha} \cdot f(x) = \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2) \cdot (1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ pentru $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, deci

integrala este convergentă, conform teoremei 6.2.6;

d) se consideră funcția $f: (0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}$ și se

calculează $\lim_{x \searrow 0} x^{\alpha} \cdot f(x) = 1$ pentru $\alpha = \frac{1}{5} < 1$, deci integrala este convergentă;

e) convergentă;

f) convergentă;

g) se consideră funcția $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sin x)$ și se calculează

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} x^{\alpha} \cdot f(x) &= \lim_{x \searrow 0} x^{\alpha} \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha} \cdot (\sin x)^{\alpha} \cdot \ln(\sin x) = \\ &= \lim_{x \searrow 0} (\sin x)^{\alpha} \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{(\sin x)^{-\alpha}} = 0, \end{aligned}$$

pentru $\alpha < 1$, deci integrala este convergentă;

$$\text{h)} \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = I_1 + I_2;$$

pentru integrala I_1 , aceasta este improprie pentru $a < 1$, se consideră funcția $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{a-1} \cdot e^{-x}$ și se calculează $\lim_{x \searrow 0} x^{\alpha} \cdot f(x) = \lim_{x \searrow 0} x^{a+\alpha-1} \cdot e^{-x} < +\infty$, pentru $a + \alpha - 1 \geq 0$; deci $1 > \alpha \geq 1 - a$, de unde obținem că integrala I_1 este convergentă pentru $a > 0$; pentru integrala I_2 se consideră funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{a-1} \cdot e^{-x}$ și se calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha} \cdot f(x) = 0$ pentru $a + \alpha - 1 > 0$, deci pentru $\alpha > 1$ și obținem astfel convergența integralei $I = I_1 + I_2$;

i) se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x}$, $a \geq 0$ și se calculează

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^{a-1}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+a-1}}{1+x} < +\infty \text{ pentru } \alpha + a - 1 \leq 1, \text{ deci pentru } 1 < \alpha \leq 2 - a.$$

Obținem astfel convergența integralei pentru $a < 1$ și divergența ei pentru $a \geq 1$.

$$\boxed{3} \text{ Să se calculeze integrala } \int_0^{\infty} \min \left\{ x^2, \frac{1}{x^2} \right\} dx.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{Fie funcția } f(x) = \min \left\{ x^2, \frac{1}{x^2} \right\}, x \in \mathbb{R}_+^*. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pentru } x \in (0, 1]; \\ \frac{1}{x^2}, & \text{pentru } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

$$\text{Rezultă } \int_0^{\infty} \min \left\{ x^2, \frac{1}{x^2} \right\} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{4} \text{ Să se calculeze integrala } \int_1^{\infty} \frac{dx}{2 \cdot [x] + 3 \cdot [x]^2 + [x]^3}.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{Fie funcția } f(x) = \frac{1}{2[x] + 3[x]^2 + [x]^3}, (\forall) x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Pentru $n \leq x < n+1$, avem $[x] = n$, iar

$$\int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} \frac{dx}{2n + 3n^2 + n^3} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

5 Să se calculeze integrala $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}.$

Indicație de rezolvare:

$$I = I_1 + I_2, \text{ unde } I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} \text{ și } I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Se demonstrează convergența ambelor integrale, de unde rezultă și convergența integralei I .

Pentru integrala I_1 se face schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, deci $dx = \left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$ și

obținem $I_1 = I_2$, deci $I = 2 \cdot I_2$.

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{\infty} (x+1)^{-1} \cdot (x^2-1)^{-1/2} dx = \\ &= \int_1^{\infty} (x+1)^{-3/2} \cdot (x-1)^{-1/2} dx = \int_2^{\infty} (x+1)^{-3/2} \cdot [(x+1)-2]^{-1/2} d(x+1).\end{aligned}$$

Se consideră $m = -3/2$, $n = 1$, $p = -1/2 \notin \mathbb{Z}$.

$\frac{m+1}{n} = -1/2 \notin \mathbb{Z}$, dar $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ și se face substituția $\frac{(x+1)-2}{x+1} = t^2$.

Rezultă $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ și, în urma efectuării calculelor, obținem $I_2 = 1$, deci $I = 2$.

6 Să se calculeze:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$.

Indicație de rezolvare:

a) Funcția $\sin(\cdot)$ este o funcție impară, deci $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$;

b) 0.

6. Test de autoevaluare

1 Să se arate că:

$$\text{i)} \quad I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad I_{2n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{n+3/2}} = \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)}; \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1} = 0;$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{formula lui Wallis}).$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{i)} \quad I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx;$$

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \cdot \sin x \, dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \cdot (\cos x)' \, dx = \dots \text{etc.}$$

În final se obține $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \dots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot I_0$ și cum $I_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă că

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

ii) se demonstrează similar cu punctul i);

iii) deoarece $0 < I_{2n+1} < I_{2n} < \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}$, rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1} = 0$$

iv) din inegalitățile $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ rezultă

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

iar prin trecere la limită obținem formula lui Wallis.

2 Să se determine aria regiunii plane care se află în primul cadran, este mărginită de axa ox și:

a) axa oy și curba de ecuație $y(x^2 + 4) = 8$;

b) dreapta $x = 3$ și curba de ecuație $yx^2 = 1 + 4y$.

Indicație de rezolvare:

a) $A = \int_0^{\infty} |f(x)| dx = \dots\dots\dots = 2\pi$;

b) $A = \frac{1}{4} \cdot \ln 5$.

3 Să se calculeze $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1}$, $\alpha \neq k\pi$ și apoi să se deducă valorile

integralelor:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$; **ii)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$; **iii)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Indicație de rezolvare: Se descompune fracția de sub integrală în fracții simple:

$$\frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}. \text{ Se obține:}$$

$$\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} dx = \frac{1}{4 \cos \alpha} \cdot \left[\int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} - \int \frac{x dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} \right].$$

Dar $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = (x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$ și cu schimbarea de variabilă $x = \cos \alpha + t \sin \alpha$ și similar pentru $x^2 + 2x \cos \alpha + 1 = (x + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$, obținem:

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \alpha + 1).$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x \cos \alpha + 1).$$

$$\text{Deci, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}.$$

Valorile celor trei integrale se obțin dând valori convenabile parametrului α .

LECȚIA 8 - INTEGRALE CU PARAMETRI

1. Integrale cu parametri pe intervale compacte

Fie funcția $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă în raport cu x pe $[a, b]$ pentru orice parametru $t \in [c, d]$.

Integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este funcție de parametrul $t \in [c, d]$ și se numește *integrală cu parametru*.

Teorema 7.1.1. Dacă funcția $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe domeniul de definiție, atunci integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este o funcție continuă pe $[c, d]$.

Teorema 7.1.2. Dacă funcția $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe domeniul de definiție și funcțiile $u, v : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sunt continue pe domeniul lor de definiție, atunci

integrala $J(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(x, t) dx$ este o funcție continuă pe $[c, d]$.

Teorema 7.1.3. Dacă funcțiile $f, \frac{\partial f}{\partial t} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe domeniul de definiție, atunci integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este o funcție derivabilă în raport cu parametrul $t \in [c, d]$ și se verifică: $\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$.

Teorema 7.1.4. Dacă funcțiile $f, \frac{\partial f}{\partial t} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe domeniul de definiție și funcțiile $u, v : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sunt derivabile pe $[c, d]$, atunci

integrala $J(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(x, t) dx$ este o funcție derivabilă în raport cu parametrul $t \in [c, d]$ și se verifică: $J'(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + v'(t) \cdot f(v(t), t) - u'(t) \cdot f(u(t), t)$.

Teorema 7.1.5. Fie funcția $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe domeniul de definiție. Atunci

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, t) dt \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, t) dx \right] dt.$$

2. Integrale improprii cu parametri

Fie funcția $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), astfel încât integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este convergentă pentru $(\forall) t \in [c, d]$.

Definiția 7.2.1. Integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$, unde $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, **converge uniform** în raport cu $t \in [c, d]$, dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) b_0(\varepsilon) \in (a, b)$, astfel încât pentru $(\forall) u \in (b_0(\varepsilon), b)$, să avem $\left| \int_a^u f(x, t) dx - J(t) \right| < \varepsilon$, $(\forall) t \in [c, d]$.

Criteriul lui Cauchy de convergență uniformă.

Integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$, unde $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ **converge uniform** în raport cu $t \in [c, d]$, dacă și numai dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) b_0(\varepsilon) \in (a, b)$, astfel încât pentru $(\forall) x', x'' \in (b_0(\varepsilon), b)$, să avem $\left| \int_{x'}^{x''} f(x, t) dx \right| < \varepsilon$, $(\forall) t \in [c, d]$.

Observație. Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$ un șir crescător cu $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$. Cu ajutorul șirului considerat putem construi seria de funcții:

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x, t) dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x, t) dx + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t), \text{ unde } u_k(t) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, t) dx.$$

Teorema 7.2.2. Dacă integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$, unde $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

este uniform convergentă în raport cu $t \in [c, d]$, atunci seria de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$, unde

$u_k(t) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, t) dx$ este uniform convergentă pe $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x, t) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, t) dx.$$

Teorema 7.2.3. Fie funcția $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Dacă integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este uniform convergentă în raport cu $t \in [c, d]$, atunci funcția $J(t)$ este continuă pe intervalul $[c, d]$.

Teorema 7.2.4. Fie funcția $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Dacă:

- i) $\frac{\partial f}{\partial t}$ există și este continuă pe $[a, b) \times [c, d]$;
- ii) integrala $J(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este convergentă;
- iii) integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ este uniform convergentă în raport cu $t \in [c, d]$,

atunci funcția J este derivabilă pe $[c, d]$ și are loc egalitatea: $J'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$, iar

$J' : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe domeniul său de definiție.

Teorema 7.2.5. Fie $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- i) f este continuă;
- ii) integrala $\int_a^b f(x, t) dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul

$t \in [c, d]$. Atunci:

- a) integrala $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, t) dt \right] dx$ este convergentă;
- b) $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, t) dt \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, t) dx \right] dt$.

Teorema 7.2.6. Fie funcția $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- i) f este continuă;

ii) integrala $\int_a^b f(x,t)dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [c,v]$, $(\forall) v \in [c,d]$;

iii) integrala $\int_c^d f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $x \in [a,u]$, $(\forall) u \in [u,b]$;

iv) integrala $\int_c^d \left[\int_a^b |f(x,t)|dx \right] dt$ sau $\int_a^b \left[\int_c^d |f(x,t)|dt \right] dx$ este convergentă.

Atunci $\int_a^b \left[\int_c^d |f(x,t)|dt \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b |f(x,t)|dx \right] dt$.

Teorema 7.2.7 (Criteriul lui Weierstrass). Fie $f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

i) $\int_a^u f(x,t)dx$ există pentru $(\forall) u \in [a,b]$ și $(\forall) t \in [c,d]$;

ii) există o funcție $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, astfel încât $|f(x,t)| \leq g(x)$, $(\forall) x \in [a,b]$, $(\forall) t \in [c,d]$;

iii) integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă,

atunci integrala $\int_a^b f(x,t)dx$ este uniform convergentă în raport cu $t \in [c,d]$.

Teorema 7.2.8 (Criteriul lui Abel). Fie funcțiile $f, g : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

i) f este continuă;

ii) $g(\cdot, t) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ este monotonă pentru orice $t \in [c,d]$;

iii) există $M > 0$, astfel încât

$$\left| \int_a^u f(x,t)dx \right| \leq M, \quad (\forall) u \in [a,b], \quad (\forall) t \in [c,d];$$

iv) există $\lim_{x \nearrow b} g(x,t) = 0$ și este uniformă în raport cu $t \in [c,d]$.

Atunci integrala $\int_a^b f(x,t) \cdot g(x,t)dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [c,d]$.

Teorema 7.2.9 (Criteriul lui Leibniz)

Fie funcțiile $f, g : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

i) f este continuă;

ii) $g(\cdot, t) : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este monotonă pentru orice $t \in [c, d]$;

iii) integrala $\int_a^b f(x, t) dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul

$t \in [c, d]$;

iv) există $M > 0$, astfel încât $|g(x, t)| \leq M$, $(\forall) x \in [a, b)$, $(\forall) t \in [c, d]$.

Atunci integrala $\int_a^b f(x, t) \cdot g(x, t) dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [c, d]$.

Observație. Criteriile lui Abel și Leibniz se pot extinde prin înlocuirea intervalului $[c, d]$ cu o mulțime arbitrară $A \subset \mathbb{R}$.

3. Integrala lui Euler de speța a doua

Aceasta este definită pentru $p > 0$, prin $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$.

Pentru a studia convergența integralei $\Gamma(p)$, se consideră descompunerea de forma

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx.$$

Pentru $\int_0^1 x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$, se consideră $\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \cdot x^{p-1} \cdot e^{-x} = \lim_{x \searrow 0} x^{\alpha+p-1} \cdot e^{-x} < +\infty$,

pentru $1 > \alpha \geq 1 - p$, deci pentru $p > 0$. Rezultă convergența integralei $\int_0^1 x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$.

Pentru integrala $\int_1^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$, se va ține seama de inegalitatea $e^x > \frac{x^n}{n!}$, sau

$$e^{-x} < \frac{n!}{x^n}, \text{ de unde rezultă că } x^{p-1} \cdot e^{-x} < \frac{n!}{x^{n+1-p}}.$$

Pentru $n > p$, folosind primul criteriu de comparație avem:

$$\int_1^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx < \int_1^{\infty} \frac{n!}{x^{n+1-p}} dx \text{ și cum } \int_1^{\infty} \frac{n!}{x^{n+1-p}} dx = n! \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{n+1-p}} dx$$

este convergentă pentru $n > p$, rezultă și convergența integralei $\int_1^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$.

Am obținut astfel convergența integralei $\Gamma(p)$.

Integrând prin părți,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx &= \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\infty} (x^p)' \cdot e^{-x} dx = \\ &= \frac{1}{p} \cdot x^p \cdot e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\infty} x^p \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma(p+1), \end{aligned}$$

obținem proprietatea $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$.

Aceasta conduce la

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdot \dots \cdot (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p).$$

Pentru $p=1$, avem $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, de unde rezultă că $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Integrala lui Euler de prima speță

Aceasta este definită prin $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx$, $p, q > 0$.

Pentru $p \geq 1$, $q \geq 1$, funcția $f(x) = x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}$ este continuă pe compactul $[0, 1]$, deci integrala are sens.

Pentru $p < 1$ sau $q < 1$, se studiază convergența integralei $B(p, q)$.

Dacă $p < 1$, integrala $\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} dx$ este convergentă pentru $1-p < 1$, deci pentru $p > 0$.

Dacă $q < 1$, integrala $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} dx$ este convergentă pentru $1-q < 1$, deci pentru $q > 0$. Am obținut astfel convergența integralei $B(p, q)$.

Proprietăți și relații de legătură:

1) $B(p, q) = B(q, p)$, $(\forall) p, q > 0$.

2) Între cele două integrale ale lui Euler se verifică relația

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (\forall) p, q > 0.$$

$$3) \Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (\forall) p \in (0,1).$$

Exemple:

$$1) \text{ Fie integrala } I = \int_0^{\infty} e^{-x^p} dx, \quad p > 0. \text{ Făcând schimbarea de variabilă } x^p = y,$$

$$\text{rezultă } dx = \frac{1}{p} \cdot y^{\frac{1}{p}-1} dy, \text{ de unde rezultă: } I = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot y^{\frac{1}{p}-1} dy = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

$$2) \text{ Pentru } p = \frac{1}{2} \text{ avem } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} dx. \text{ Făcând schimbarea de variabilă}$$

$$x = t^2, \text{ obținem } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Rezultă } \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{În același timp, } B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2.$$

$$\text{Astfel, } \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \int_0^1 x^{-1/2} \cdot (1-x)^{-1/2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. \quad \text{Pentru calculul}$$

$$\text{integralei } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ se face schimbarea de variabilă } x = \sin^2 t, \text{ deci}$$

$$dx = 2 \sin t \cdot \cos t dt.$$

$$\text{Rezultă că } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin t \cdot \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}} = \pi \text{ și deci } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Am obținut } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ numită integrala Euler-Poisson.}$$

5. Probleme rezolvate

I Să se calculeze integralele:

$$\textbf{a)} \quad J(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx, \quad \alpha > 1;$$

$$\textbf{b)} \quad J(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 \cdot \sin^2 x + \beta^2 \cdot \cos^2 x) dx.$$

Indicație de rezolvare:

a) fie funcția

$$f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, \alpha) = \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) \text{ continuă}$$

și există $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 x}$ continuă pentru $\alpha > 1$; rezultă că există

$$J'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx = 2\alpha \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\alpha^2 - \sin^2 x} \quad \text{și se face schimbarea de variabilă}$$

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \text{ obținem}$$

$$J'(\alpha) = 2\alpha \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2(\alpha^2 - 1)} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

și rezultă că $J(\alpha) = \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + C$, unde C este constanta de integrare;

$$C = J(\alpha) - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \alpha^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right) dx - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \ln \alpha dx + \int_0^{\pi/2} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right) dx - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) =$$

$$= \pi \cdot \ln \alpha - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}),$$

$$\text{deoarece } \int_0^{\pi/2} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right) dx = 0, \quad \text{rezultă din } \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \leq \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right) \leq \ln 1;$$

$$\text{obținem } C = \pi \cdot \ln \alpha - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \text{ și deci}$$

$$J(\alpha) = \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + \pi \cdot \ln \alpha - \pi \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = \pi \cdot \ln \alpha;$$

b) fie funcția $f(x, \alpha, \beta) = \ln(\alpha^2 \cdot \sin^2 x + \beta^2 \cdot \cos^2 x)$ continuă pe domeniul său de definiție.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) = \frac{2\alpha \cdot \sin^2 x}{\alpha^2 \cdot \sin^2 x + \beta^2 \cdot \cos^2 x} \text{ și } \frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \alpha, \beta) = \frac{2\beta \cdot \cos^2 x}{\alpha^2 \cdot \sin^2 x + \beta^2 \cdot \cos^2 x}$$

sunt continue. Rezultă că există

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha \cdot \sin^2 x}{\alpha^2 \cdot \sin^2 x + \beta^2 \cdot \cos^2 x} dx,$$

pentru calculul căreia se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$. Obținem astfel $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\pi}{\alpha + \beta}$.

Similar obținem că $\frac{\partial J}{\partial \beta} = \frac{\pi}{\alpha + \beta}$.

Astfel avem $J(\alpha, \beta) = \pi \cdot \ln(\alpha + \beta) + \varphi(\beta)$. Derivând ultima relație obținută în raport cu variabila β , rezultă $\frac{\partial J}{\partial \beta} = \frac{\pi}{\alpha + \beta} + \varphi'(\beta) = \frac{\pi}{\alpha + \beta}$, deci $\varphi'(\beta) = 0$, iar $\varphi(\beta) = C$. Pentru determinarea constantei C se consideră $J(1, 1) = \pi \cdot \ln 2 + C = 0$, de unde $C = -\pi \cdot \ln 2$.

Rezultă astfel $J(\alpha, \beta) = \pi \cdot \ln(\alpha + \beta) - \pi \cdot \ln 2$.

2 Din calculul integralei

$$F(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0,$$

să se deducă valoarea integralei $G(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x)^2}$.

Indicație de rezolvare:

Fie funcția $f(x, a, b) = \frac{1}{a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x}$, care este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{-2a \cdot \cos^2 x}{(a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x)^2} \text{ și } \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-2b \cdot \sin^2 x}{(a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x)^2} \text{ continue.}$$

Rezultă existența pentru integralele $\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^{\pi/2} \frac{-2a \cdot \cos^2 x}{(a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x)^2} dx$ și

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \int_0^{\pi/2} \frac{-2b \cdot \sin^2 x}{(a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x)^2} dx.$$

Se observă că $\frac{1}{2a} \cdot \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) + \frac{1}{2b} \cdot \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = -G(a, b)$, deci

$$G(a, b) = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) - \frac{1}{2b} \cdot \frac{\partial F}{\partial b}(a, b).$$

Se calculează $F(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x}$, făcând schimbarea de

variabilă $\operatorname{tg} x = t$ și obținem $F(a, b) = \frac{\pi}{2ab}$.

$$\text{Rezultă } G(a, b) = \frac{\pi}{4ab} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

3 Să se studieze convergența uniformă a următoarelor integrale improprii cu parametri:

$$\textbf{a)} \quad F(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \sin(tx) dx, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\textbf{b)} \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) dx}{1+x^2}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\textbf{c)} \quad F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx, \quad \alpha > 0;$$

Indicație de rezolvare:

$$\textbf{a)} \quad |f(x, t)| = |e^{-x} \cdot \sin(tx)| \leq e^{-x}, \quad (\forall) x \in [0, +\infty), \quad (\forall) t \in \mathbb{R};$$

se consideră funcția $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = e^{-x}$; din convergența integralei improprii

$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ și din $|f(x, t)| \leq g(x)$, $(\forall) x, t$, rezultă convergența uniformă a integralei

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \sin(tx) dx;$$

b) uniform convergentă;

c) fie integrala $I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$, $\alpha, \beta > 0$ și fie funcția

$f(x, \alpha, \beta) = e^{-\beta x} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{x}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, iar integrala

$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$, $\alpha, \beta > 0$ este convergentă; $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = e^{-\beta x} \cdot \cos(\alpha x)$ este continuă și

integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cdot \cos(\alpha x) dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul

$\alpha > 0$, deoarece $|e^{-\beta x} \cdot \cos(\alpha x)| \leq e^{-\beta x}$, iar integrala $\int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx$ este convergentă pentru orice $\beta > 0$.

Astfel, există $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cdot \cos(\alpha x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Integrând în raport cu α ,

obținem $I(\alpha, \beta) = \arctg \frac{\alpha}{\beta} + C$, unde $C = 0$, deci $I(\alpha, \beta) = \arctg \frac{\alpha}{\beta}$.

În același timp, integrala $I(\alpha, \beta)$ este uniform convergentă în raport cu $\beta > 0$ și

$\lim_{\beta \rightarrow 0} I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = F(\alpha)$, deci $F(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}$;

4 Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int_0^{\infty} x^{2n} \cdot e^{-ax^2} dx$, $a > 0$; b) $\int_0^{\infty} x^m \cdot e^{-x^n} dx$, $m, n \in \mathbb{N}$;

c) $\int_0^1 x^{p-1} \cdot \ln^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$; d) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$;

e) $\int_0^1 x \sqrt{x^3(1-x)} dx$; f) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$;

g) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$; h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > 0$;

i) $\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}} dx$, $a, b > 0$, $p > -1$.

Indicație de rezolvare:

a) se face substituția $ax^2 = t$, de unde rezultă că $dx = \frac{1}{2\sqrt{a} \cdot \sqrt{t}} dt$, iar integrala

$$\text{devine } I = \frac{1}{2a^{n+1/2}} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{n-1/2} dt = \frac{1}{2a^{n+1/2}} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

b) se face substituția $x^n = t$, deci $dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt$; integrala devine

$$I = \frac{1}{n} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{m+1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right);$$

c) se face substituția $x = e^{-t}$, deci $dx = -e^{-t} dt$ și obținem $I = (-1)^n \cdot \frac{n!}{p^{n+1}}$;

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx &= \int_0^1 x^{1/2} \cdot (1-x)^{1/2} dx = B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2!} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} = \frac{1}{8} \cdot \pi; \end{aligned}$$

e) $\frac{5\pi}{27}$;

f) se face substituția $x^4 = \frac{t}{1-t}$ și obținem

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \cdot B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$

g) $\frac{\pi a^4}{16}$;

h) se face substituția $x^m = t$ și obținem

$$I = \frac{1}{m} \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1} \cdot (1-t)^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{m} \cdot B\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right);$$

i) se face substituția $t = \frac{x(1+p)}{x+p}$ și se găsește $I = \frac{B(a,b)}{p^b(p+1)^a}$.

6. Test de autoevaluare

1 Să se calculeze următoarele integrale cu parametri:

a) $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b \geq 0;$

b) $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x(1+x^2)} dx, \alpha > 0;$

c) $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x) \cdot \operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2} dx, \alpha, \beta > 0.$

2 Să se deducă egalitățile:

a) $\int_0^\infty \frac{2t dx}{(x^2 + t^2)^2} = -\frac{\pi}{2t^2}, t > 0;$

b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln t, t > 0;$

c) $\int_0^\infty \frac{1 - \cos(xt)}{x} \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + t^2).$

3 Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a, b > 0;$

b) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)};$

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx;$

d) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, m, n > 0.$

7. TEMĂ DE CONTROL

1 Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$ și

$$g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția f și să se precizeze mulțimea pe care are loc dezvoltarea.

b) Să se studieze natura integralei $I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ și apoi să se calculeze valoarea sa.

c) Utilizând rezultatele obținute, să se deducă sumele seriilor numerice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2 Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt. \text{ Să se determine mulțimea de convergență a seriei obținute și să se arate}$$

$$\text{că } g(1) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)} \right).$$

3 a) Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{pentru } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, existența derivatelor parțiale și diferențiabilitatea funcției f în $(0, 0)$.

b) Să se calculeze $I_n = \int_0^{\pi/2} \left[f\left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}\right) \right]^n dt$, pentru $n = 2k$, $n = 2k + 1$.

c) Să se arate că șirul de funcții $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $g_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot f(x^2, n)$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ către o funcție continuă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și să se calculeze $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$.

4 Se consideră funcția $F : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, cu proprietatea că există $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot F(u, v) + \beta \cdot F(v, u) = k$, $(\forall) u, v \in [-1, 1]$.

a) Să se calculeze $I = \int_0^{\pi/2} F(\sin x, \cos x) dx$.

b) Să se determine $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^*$ pentru cazul particular $F(u, v) = \frac{u^2 + 2uv + 2}{5 + 4uv}$,

unde $u, v: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $u(x) = \sin x$, $v(x) = \cos x$.

Utilizând rezultatele obținute anterior, să se calculeze valoarea integralei

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 2}{5 + 2 \sin 2x} dx.$$

5 (i) Să se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$.

(ii) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât integrala $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + \lambda}$ să fie

convergentă;

(iii) Fie $I_{k,n} = \int_0^1 x^k \cdot \ln^n x dx$, unde $k, n \in \mathbb{N}$, ($I_{0,0} = 1$).

a) Să se arate că $I_{k,n} = -\frac{n}{k+1} \cdot I_{k,n-1}$, $n \geq 1$.

b) Să se arate, folosind integrarea termen cu termen a seriilor de funcții că

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k^k}.$$

6 **a)** Să se găsească mulțimea din $\mathbb{R}$ pe care converge seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ și

să se cerceteze convergența uniformă pe $[0, 1]$.

b) Să se calculeze $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ pentru x în mulțimea de

convergență.

c) Folosind $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)^2}$.

d) Să se demonstreze convergența și să se calculeze integrala

$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x) dx$ folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\ln(1+x)$ în jurul lui zero.

7 Fie integralele $y(t) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(1+x^2)} dx$ și $z(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{(1+x^2)} dx$, unde

$t \in [0, +\infty)$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul t .

8 Să se calculeze integrala $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)} dx$.

9 Din calculul integralei $F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$, să se obțină valoarea

integralei $I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \cos(\pi x) dx$.

10 Știind că $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-|a|}$, să se calculeze

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{x \cdot \sin(ax)}{(1+x^2)^2} dx.$$

11 Să se găsească o relație între integralele $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$ și

$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$, stabilind mai întâi condiția pe care trebuie să o îndeplinească $n \in \mathbb{R}$, astfel

ca I_1 și I_2 să fie convergente.

12 Să se calculeze $I = \int_0^1 \ln(\Gamma(x)) dx$, unde $\Gamma(x)$ este funcția lui Euler.

8. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 3

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
2. **Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină**, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Vol III, Editura Tehnică, București, 1967
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
4. **M. Craiu, M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră și analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978, 1979, Editura ALL, 1993, 1994
6. **P. Flondor, O. Stănășilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
7. *Analiză matematică*, vol. II, Ediția a III-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
8. **C. Udrea**, *Integrala Riemann pentru funcții de variabilă vectorială*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2001
9. **M. Roșculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973
10. **M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
11. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2001
12. **O. Stănășilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
13. **I. Sprințu, V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferențial și integral*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2003
14. **D. M. Băținețu-Giurgiu, M. Băținețu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciții și probleme*, Editura Militară, București, 1992