

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 4 – INTEGRALE CURBILINII, INTEGRALE MULTIPLE, INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ, FORMULE INTEGRALE

Obiective urmărite:

1. Însușirea noțiunilor fundamentale și a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor din domeniul calculului integral;
2. Formarea și dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale și de specialitate din anii superiori;
3. Formarea și dezvoltarea deprinderilor și aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă și argumentare fundamentată în soluționarea problemelor de natură matematică și de specialitate, precum și formarea și dezvoltarea unui raționament riguros și a abilităților de calcul rapid și corect necesare pentru diferite aplicații.
4. Formarea și dezvoltarea capacităților de abstractizare, generalizare și sinteză;
5. Aplicarea analizei matematice în alte domenii ale științei și practicii.

Rezumat:

În această unitate de învățare sunt prezentate, pe parcursul a cinci lecții, principalele noțiuni teoretice referitoare la integrala curbilinie de tipul I și II, integrala dublă, integrala triplă, integrala de suprafață de tipul I și II, formulele integrale Green, Stokes, Gauss-Ostrogradski, precum și algoritmii cei mai des întâlniți pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestei unități de învățare.

După parcurgerea celor cinci lecții din cuprinsul unității de învățare studenții vor dobândi cunoștințele teoretice și își vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaște, înțelege și rezolva probleme specifice referitoare la tematica anunțată anterior.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecții sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule și algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noțiunilor teoretice și algoritmilor de rezolvare prezentați anterior;
- în finalul fiecărei lecții este propus un test de autoevaluare și la sfârșitul unității de învățare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate, ordonate după gradul lor de dificultate și acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învățare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unității de învățare, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exercițiu se recomandă identificarea algoritmului și descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluțiilor problemelor rezolvate și rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare și în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

- Drum, drum rectificabil, curbă, curbă rectificabilă, integrală curbilinie de primul tip, integrală curbilinie de al doilea tip, independența de drum a integralei curbilinii de tipul doi;
- Diviziune, sistem de puncte intermediare asociat unei diviziuni, sumă Riemann, sumă Darboux inferioară și sumă Darboux superioară, mulțime neglijabilă, funcție continuă aproape peste tot (continuă a.p.t.), domeniu simplu în raport cu o axă de coordonate, schimbarea de variabilă la integrala multiplă;
- Pânză parametrizată, suprafață parametrizată, formă diferențială, integrală de suprafață de primul tip, suprafață orientată, integrală de suprafață de al doilea tip;
- formă diferențială, diferențială exterioară, domeniu cu bord regulat, domeniu orientat, formulele Green, Stokes, Gauss-Ostrogradski, camp vectorial, rotor, divergență, circulație, flux.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii și însușirii noțiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare și dobândirii competențelor anunțate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecție, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare și a Temelor de control.

LECȚIA 9 - INTEGRALA CURBILINIE

1. Noțiuni teoretice

Definiția 5.1

- (i) Fie $I = [a, b]$ interval compact. O funcție continuă $d : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește drum.
(ii) Se numește imaginea drumului mulțimea

$$I(d) = \{d(t), t \in [a, b]\} = \{(f(t), g(t), h(t)), t \in [a, b]\}.$$

- (iii) Dacă $d(a) = d(b)$, atunci drumul se numește închis.

- (iv) Fie $d : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $d(t) = (f(t), g(t), h(t))$.

Drumul d se numește rectificabil dacă și numai dacă funcțiile f, g, h sunt cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Lungimea drumului d , dacă f, g, h au derivată integrabilă pe $[a, b]$, este dată de relația $\ell(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt$.

(v) Două drumuri $d: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\delta: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numesc echivalente dacă există o funcție $\omega: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, astfel încât $\omega(a) = \alpha$; $\omega(b) = \beta$ și $\forall t \in [a, b]$, $d(t) = (\delta \circ \omega)(t)$.

Relația astfel definită este o relație de echivalență.

(vi) Se numește curbă o clasă de drumuri echivalente. Se numește curbă închisă o curbă ce conține un drum închis, se numește curbă rectificabilă o curbă ce conține un drum rectificabil, se numește lungimea curbei lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc curba și se numește imaginea curbei imaginea drumurilor care aparțin curbei.

Definiția 5.2. Fie C o curbă rectificabilă în spațiu:

$$C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

și fie $F: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. (D un domeniu ce conține imaginea curbei C)

Fie $\ell(t)$ lungimea curbei C . Dacă integrala Stieltjes.

$$\int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) d\ell(t)$$

există, atunci ea se notează $\int_C F(x, y, z) d\ell$ și se numește integrala curbilinie de primul tip a funcției F de-a lungul curbei C .

Observația 5.3

(i) Dacă funcțiile f, g, h sunt de clasa $\mathcal{C}^1([a, b])$ și dacă F este continuă pe D , atunci:

$$\int_C F(x, y, z) d\ell = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt.$$

(ii) Considerând un fir material de grosime neglijabilă care este imaginea unei curbe C și dacă $\mu = \mu(x, y, z)$ este densitatea în punctul (x, y, z) , atunci masa M și coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_G sunt date de formulele:

$$M = \int_C \mu(x, y, z) d\ell, \quad x_G = \frac{1}{M} \int_C x \mu(x, y, z) d\ell,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_C y \mu(x, y, z) d\ell, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_C z \mu(x, y, z) d\ell,$$

evident dacă integralele de mai sus există.

Definiția 5.4

(i) Fie $C = \{(f(t), g(t), h(t)), t \in [a, b]\}$ o curbă în spațiu; D un domeniu în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ care conține imaginea curbei C ; $P, Q, R : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă integralele Stieltjes

$$\begin{aligned} & \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) df(t); \\ & \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t)) dg(t); \\ & \int_a^b R(f(t), g(t), h(t)) dh(t), \end{aligned}$$

există atunci suma lor se notează

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

și se numește integrala curbilinie de tipul al doilea.

Dacă funcțiile P, Q, R sunt continue și curba C rectificabilă, atunci integrala curbilinie de tipul al doilea există.

(ii) Din punct de vedere mecanic integrala

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

reprezintă lucrul mecanic al forței vectoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

al cărei punct de aplicație descrie curba C .

Proprietățile 5.5

(i) Dacă $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe D și dacă funcțiile $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă $\mathcal{C}^1([a, b])$, atunci integrala curbilinie de tipul al doilea există și

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t)) f'(t) + Q(f(t), g(t), h(t)) \cdot g'(t) + R(f(t), g(t), h(t)) \cdot h'(t)] dt. \end{aligned}$$

(ii) Fie C o curbă în spațiu, D un domeniu care include imaginea lui C și

$$P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Atunci, dacă există integralele

$$\int_C P_i(x, y, z)dx + Q_i(x, y, z)dy + R_i(x, y, z)dz, \quad i = \overline{1, 2},$$

are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & \int_C \sum_{i=1}^2 \lambda_i P_i(x, y, z)dx + \sum_{i=1}^2 \lambda_i Q_i(x, y, z)dy + \sum_{i=1}^2 \lambda_i R_i(x, y, z)dz = \\ & = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_C P_i(x, y, z)dx + Q_i(x, y, z)dy + R_i(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

(ii) Fie C_1, C_2 două curbe juxtapozabile și $C = C_1 \cup C_2$.

Fie $P, Q, R: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este un domeniu ce conține imaginea curbei C . Atunci, dacă integralele există, are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} & \int_{C=C_1 \cup C_2} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Definiția 5.6

(i) Fie $P, Q, R: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue. Dacă există $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, diferențiabilă pe D astfel încât

$$dF(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \quad \forall (x, y, z) \in D,$$

atunci spunem că expresia

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

este o diferențială totală pe D .

(ii) Spunem că integrala curbilinie nu depinde de drum dacă pentru orice curbe C_1 și C_2 având același punct inițial și același punct final

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \int_{C_2} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & \quad \stackrel{\text{not}}{=} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \end{aligned}$$

unde (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2) sunt extremitățile inițială și finală ale curbei C_i , $i = \overline{1, 2}$.

Proprietățile 5.7

(i) Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue.

Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

să nu depindă de drum este ca expresia

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

să fie o diferențială totală pe D .

În aceste condiții o funcție F cu proprietatea

$$dF = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

este dată de relația

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \int_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}^{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

unde (x_0, y_0, z_0) este un punct fixat în D , iar $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ este un punct oarecare în D .

(ii) Integrala unei diferențiale exacte pe o curbă închisă este nulă.

(iii) Fie $P, Q, R : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue ce admit derivate parțiale după orice direcție. Atunci

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

este o diferențială exactă dacă și numai dacă pentru orice $(x, y, z) \in D$ au loc egalitățile

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

2. Probleme rezolvate

1 Să se arate că următoarele drumuri au aceeași imagine. Sunt drumuri echivalente cu aceeași orientare?

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (a \cos t, b \sin t);$$

$$g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (a \cos t, -b \sin t).$$

Rezolvare. Dacă notăm cu $x = a \cos t$ și $y = b \sin t$, prin eliminarea lui t , rezultă imaginea drumului f ca fiind elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Analog, dacă notăm cu $x = a \cos t$, $y = -b \sin t$, rezultă că $\text{Im } g$ este aceeași elipsă. Prima parametrizare parcurge elipsa în sens trigonometric direct, iar a doua, în sens invers. Rezultă că f și g nu sunt echivalente cu aceeași orientare.

[2] Să se arate că următoarele drumuri sunt echivalente cu aceeași orientare:

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (a \cos t, a \sin t, b);$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t, b).$$

Rezolvare. Dacă notăm cu

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = b \quad \text{sau} \quad x = a \cos 2t, \quad y = a \sin 2t, \quad z = b,$$

obținem că imaginea în $\mathbb{R}^3$ a lui f și g este cercul cu centrul pe axa Oz , de rază a situat în planul $z = b$. Observăm că aplicația

$$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{2}$$

este bijectivă, continuă, strict crescătoare, iar

$$f(t) = (g \circ \varphi)(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezultă că f și g sunt echivalente cu aceeași orientare.

[3] Să se calculeze lungimea cicloidei

$$\gamma: \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8. \end{aligned}$$

[4] Să se calculeze lungimea cardioidei

$$\gamma: \begin{cases} x = R(2 \cos t - \cos 2t); \\ y = R(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0.$$

Rezolvare.

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(-2 \sin t + 2 \cos 2t)^2 + R^2(2 \cos t - 2 \sin 2t)^2} dt = 16R.$$

5 Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip $\int_{\gamma} xy \, ds$, unde

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

Rezolvare.

$$\int_{\gamma} xy \, ds = \int_0^{\pi} \cos^3 t \sin t \sqrt{4 \cos^2 t + 1} \, dt = 0.$$

6 Să se calculeze

$$\int_{\gamma} (x^2 - y^2) \, ds,$$

unde γ are ca imagine mulțimea

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2, x + y + z = 0\}.$$

Rezolvare. γ are parametrizarea

$$\gamma: \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t; \\ z = -a(\sin t + \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x^2 - y^2) \, ds &= \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 (\cos t - \sin t)^2} \, dt = 0. \end{aligned}$$

7 Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{\gamma} xy \, dx + dy,$$

unde

$$\gamma: \begin{cases} x = 9 \cos t; \\ y = 9 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare.

$$\int_{\gamma} xy \, dx + dy = \int_0^{2\pi} [81 \cos t \sin t (-9 \sin t) + 9 \cos t] \, dt = -729 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} + 9 \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

8 Să se calculeze:

$$I = \int_{\gamma} (y^2 + 2xz) dx + 2y(x+z) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

unde

$$\gamma: \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t; \\ z = ct, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[(b^2 \sin^2 t + 2act \cos t)(-a \sin t) + \right. \\ &\quad \left. + 2b \sin t(a \cos t + ct) \cdot (b \cos t) + (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t) \cdot c \right] dt = \\ &= 2\pi a^2 c. \end{aligned}$$

9 Să se calculeze:

$$I = \int_{(-1,1)}^{(2,-1)} x(1+x) dx - y(1+y) dy,$$

verificându-se că nu depinde de drumul care unește punctele $(-1,1)$ și $(2,-1)$.

Rezolvare. Fie $P(x,y) = x(1+x)$ și $Q(x,y) = -y(1+y)$.

Avem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Rezultă că integrala nu depinde de drumul care unește punctele

$(-1,1)$ și $(2,-1)$. Fie γ drumul care unește cele două puncte:

$$\gamma: \begin{cases} x = 3t - 1; \\ y = -2t + 1, \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

Atunci:

$$I = \int_0^1 [9t(3t-1) + 2(-2t+1)(-2t+2)] dt = \frac{31}{6}.$$

10 Să se determine funcția $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dacă

$$dU = (2x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

Rezolvare. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x (2t^2 + 2ty_0 - y_0^2) dt + \int_{y_0}^y (x^2 - 2xt - t^2) dt = \\ &= 2 \frac{t^3}{3} \Big|_{x_0}^x + \frac{t^2}{2} y_0 \Big|_{x_0}^x - y_0^2 t \Big|_{x_0}^x + x^2 t \Big|_{y_0}^y - x \frac{t^2}{2} \Big|_{y_0}^y - \frac{t^3}{3} \Big|_{y_0}^y = \\ &= \frac{x-y}{3} (x^2 + 4xy + y^2) + C, \end{aligned}$$

unde C este o constantă reală.

[11] Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța

$$F(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

când punctul ei de aplicație descrie arcul

$$\widehat{AB} = \{(x, y, z) \mid x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, \pi]\}.$$

Rezolvare. Lucrul mecanic L este

$$\begin{aligned} L &= \int_{\widehat{AB}} (2x + y + z) dx + (x + 2y + z) dy + (x + z + 2z) dz = \\ &= \int_0^\pi [(2a \cos t + a \sin t + bt) \cdot (-a \sin t) + (a \cos t + 2a \sin t + bt)(a \cos t) + \\ &\quad + (a \cos t + a \sin t + 2bt) \cdot b] dt = b\pi(b\pi - 2a). \end{aligned}$$

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

$$\mathbf{[12]} \int_C y e^{-x} d\ell, \text{ dacă } C = \begin{cases} x = \ln(1+t^2); \\ y = 2 \arctg t - t + 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \int_C y e^{-x} d\ell &= \int_0^1 (2 \arctg t - t + 1) e^{-\ln(1+t^2)} \cdot \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2} dt = \\ &= \int_0^1 (2 \arctg t - t + 1) \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 1 dt = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{13} \quad \int_C y d\ell, \text{ dacă } C = \begin{cases} x = R(t - \sin t); \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], R > 0.$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \int_C y d\ell &= \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t) \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} R^2(1 - \cos t) \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \\ &= R^2 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2} dt = 4R^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{32R^2}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{14} \quad \int_C (x + y) d\ell, \text{ dacă } C = \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], a, b > 0.$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \int_C (x + y) d\ell &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t + b \sin t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^1 a \sqrt{(a^2 - b^2)u^2 + b^2} du + \int_0^1 b \sqrt{(b^2 - a^2)u^2 + a^2} du = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \left(b \arccos \frac{b}{a} + a \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{15} \quad \int_C xy d\ell, \text{ dacă } C: \begin{cases} x = |t|; \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \int_C xy d\ell &= \int_{-1}^0 -t \sqrt{1 - t^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}} dt + \\ &+ \int_0^1 t \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}} dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^1 t dt = 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{16} \quad \int_C (x + y + z) d\ell, \text{ dacă } C: \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t; \\ z = bt, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a, b > 0.$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \int_C (x + y + z) d\ell &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t + a \sin t + bt) \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t + a \sin t + bt) dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left(2a + \frac{b\pi^2}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{17} \quad \int_C (x^2 + y^2) \ln z d\ell, \text{ dacă } C: \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t; \\ z = e^t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

$$\int_C (x^2 + y^2) \ln z d\ell = \int_0^1 e^{2t} t \cdot e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \int_0^1 t e^{3t} dt = \sqrt{3} \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$d\ell = \sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt = e^t \sqrt{3} dt.$$

18 Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului

$$C: \begin{cases} x = t; \\ y = \frac{t^2}{2}, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \text{ și are densitatea liniară } \rho(x, y) = 1 + x.$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} M &= \int_C (1 + x) d\ell = \int_0^1 (1 + t) \cdot \sqrt{1 + t^2} dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt + \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{7\sqrt{2} - 2}{6}. \end{aligned}$$

19 Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului

$$C: \begin{cases} x = 4t^5; \\ y = \sqrt{15} t^4; \\ z = 2t^3, \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \text{ și are densitatea liniară } \rho(x, y, z) = \left| \frac{z}{2} \right|.$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned}
M &= \int_C \left| \frac{z}{2} \right| d\ell = \int_{-1}^1 |t^3| \cdot \sqrt{(20t^4)^2 + (4 \cdot \sqrt{15}t^3)^2 + (6t^2)^2} dt = \\
&= \int_{-1}^1 |t^3| \cdot \sqrt{400t^8 + 240t^6 + 36t^4} dt = 2 \int_0^1 t^3 \sqrt{400t^8 + 240t^6 + 36t^4} dt = \\
&= 4 \int_0^1 t^5 \sqrt{100t^4 + 60t^2 + 9} dt = 4 \int_0^1 t^5 (10t^2 + 3) dt = 5 + 2 = 7.
\end{aligned}$$

[20] $\int_C y^2 dx - x^2 dy$, dacă $C: \begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 dx - x^2 dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t (-\sin t) - \cos^2 t \cos t) dt = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

[21] $\int_C y e^x dx + x e^x dy$, dacă $C: \begin{cases} x = \ln(1+t^2); \\ y = t - 2 \operatorname{arctg} t, \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned}
\int_C y e^x dx + x e^x dy &= \int_{-1}^1 \left[(t - 2 \operatorname{arctg} t) \cdot 1 + \ln(1+t^2) (1+t^2) \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right) \right] dt = \\
&= \int_{-1}^1 \left[t - 2 \operatorname{arctg} t + (1+t^2) \ln(1+t^2) - 2 \ln(1+t^2) \right] dt = \\
&= \frac{92 - 30\pi - 12 \ln 2}{9}.
\end{aligned}$$

[22] $\int_C (x^2 + y^2) dx - (x^2 - y^2) dy$, dacă $C: \begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt{1-t}, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned}
\int_C (x^2 + y^2) dx - (x^2 - y^2) dy &= \\
&= \int_0^1 \left[(t+1-t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + (t-1+t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right] dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right) dt = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

23 Să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{y dx - x dy}{9x^2 + 4y^2 + 4y},$$

unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv care are drept imagine în plan elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ și ambele extremități în punctul $(2, 0)$.

Rezolvare. O parametrizare a curbei C poate fi

$$C: \begin{cases} x = 2 \cos \theta; \\ y = 3 \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y dx - x dy}{9x^2 + 4y^2 + 4y} &= \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3 \sin \theta \cdot (-2 \sin \theta)}{36 \cos^2 \theta + 36 \sin^2 \theta + 12 \sin \theta} - \frac{2 \cos \theta (3 \cos \theta)}{36 + 12 \sin \theta} \right] d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-6}{36 + 12 \sin \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-1}{6 + 2 \sin \theta} d\theta = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

24 Să se calculeze integrala

$$\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

dacă C este curba lui Viviani obținută prin intersecția suprafețelor

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{și} \quad x^2 + y^2 - ax = 0, \quad a > 0, \quad z > 0.$$

Rezolvare. O parametrizare a curbei C se obține folosind coordonatele cilindrice $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$. Parametrizarea cilindrului impune $\rho^2 - a\rho \cos \theta = 0 \Rightarrow \rho = a \cos \theta$.

Curba fiind pe sferă vom obține

$$a^2 \cos^4 \theta + a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + z^2 = a^2,$$

de unde rezultă $z = a \sin \theta$.

În aceste condiții:

$$\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5 \theta + \sin^2 \theta \cos 2\theta + \frac{-\sin^3 2\theta}{4} \right) d\theta = -\frac{3\pi a^3}{4}.$$

Să se calculeze următoarele integrale verificând independența lor de drum:

25 $\int_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 e^x dx + 2y e^x dy.$

Rezolvare.

$$P(x, y) = y^2 e^x;$$

$$Q(x, y) = 2y e^x.$$

Deoarece $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă că $Pdx + Qdy$ este o diferențială exactă. Considerăm drumul cu parametrizarea

$$\begin{cases} x = t; \\ y = 2 - t, \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

și integrala devine

$$\int_0^2 (2-t)^2 e^t - 2(2-t)e^t dt = \int_0^2 (t^2 - 2t) e^t dt = -4.$$

26 Să se determine o funcție $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $dF = \omega$ dacă

$$\omega = y(y + 2z)dx + 2x(y + z)dy + 2xydz.$$

Rezolvare. Fie

$$P(x, y, z) = y(y + 2z), \quad Q(x, y, z) = 2x(y + z), \quad R(x, y, z) = 2xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + 2z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

Rezultă că expresia $Pdx + Qdy + Rdz$ este diferențială totală exactă:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 2yz \Rightarrow F(x, y, z) = xy^2 + 2xyz + g(y, z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 2xz; \quad 2xy + 2xz = 2xy + 2xz + \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow F(x, y, z) = xy^2 + 2xyz + h(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xy; \quad 2xy = 2xy + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 0.$$

Deci, funcția $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ căutată va fi $F(x, y, z) = xy^2 + 2xyz + \mathcal{C}$.

3. TEST DE AUTOEVALUARE

1. Să se arate că drumul $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este rectificabil

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t^2 \sin \frac{\pi}{t}, t^2 \right), & t \in (0,1]; \\ (0,0), & t = 0. \end{cases}$$

Răspuns. $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ este mărginită.

2. Să se afle lungimea elipsei de semiaxe a, b , $a > b$.

Răspuns. $2a\pi \left[1 - \frac{e^2}{2^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} e^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} e^6 - \dots \right]$, unde

$$e^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip:

3. $\int_{\gamma} y ds$, unde $\gamma: \begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$.

Răspuns. $\frac{3\sqrt{2}a^2}{40}$.

4. $\int_{\gamma} \sqrt{y} ds$, unde $\gamma: \begin{cases} x = 2t; \\ y = t^2; \\ z = \frac{2}{3}t^3, \end{cases} \quad t \in [0,1]$.

Răspuns. $6\sqrt{3} - 2 + 3 \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

5. Să se calculeze masa firului material cu densitatea

$$\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2) \ln z$$

și care are forma arcului de curbă:

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t; \\ z = e^t, \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

Răspuns. $Masa = \int_{\widehat{AB}} \rho(x, y, z) ds = \frac{1 + 2a^3}{3\sqrt{3}}.$

Să se calculeze integralele curbilinii de al doilea tip:

6. $\int_{\gamma} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$

$$\gamma: \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Răspuns. $-2\pi.$

Să se arate că următoarele integrale sunt independente de drum și să se calculeze:

7. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy dx + x^2 dy.$

Răspuns. 1.

8. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pe un drum care nu trece prin punctul $(0,0).$

Răspuns. 9.

9. Să se calculeze

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,2)} yz dx + xz dy + xy dz,$$

verificând că integrala este independentă de drum.

Răspuns. Dacă notăm cu

$$P(x, y, z) = yz, \quad Q(x, y, z) = xz, \quad R(x, y, z) = xy,$$

atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Să se calculeze integrala curbilinie:

10. $\int_C xyz d\ell,$ dacă $C = \begin{cases} x = t; \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \\ z = \frac{1}{2}t^2, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$

Răspuns. $\frac{16\sqrt{2}}{143}.$

4. TEMĂ DE CONTROL

1. Să se calculeze $\int_C x dy$ dacă

$$C = \begin{cases} x = e^t; \\ y = \ln(1 + e^t), \end{cases} \quad t \in [0, \ln 2].$$

Răspuns. $1 + \ln \frac{2}{3}$.

2. Să se calculeze integrala $\int_C (\arcsin y) dx + x^3 dy$ dacă

$$C: \begin{cases} x = -t; \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

Răspuns. $\frac{3\pi}{8} - 2$.

3. Să se calculeze integrala

$$\int_C x dx + xy dy + xyz dz, \quad \text{dacă } C: \begin{cases} x = e^t; \\ y = e^{-t}; \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Răspuns. $\frac{e^2}{2} + \frac{2 - e}{2e}$.

4. Să se calculeze integrala

$$\int_C z \sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz, \quad \text{dacă } C = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a, b > 0.$$

Răspuns. $\frac{a^2 b}{2} (\pi - 1)$.

5. Să se calculeze integrala

$$\int_C \sqrt{y^2 + z^2} dx + \sqrt{z^2 + x^2} dy + \sqrt{x^2 + y^2} dz,$$

unde C este curba simplă care are drept imagine segmentul din spațiu AB cu $A(-1, -1, -1)$ și $B(2, 2, 2)$ și capătul în punctul A .

Răspuns. $\frac{15\sqrt{2}}{2}.$

6. Să se calculeze integrala

$$\int_C y dx + z dy + x dz,$$

unde C este curba simplă închisă care are drept imagine triunghiul din spațiu $A_1A_2A_3A_1$ cu vârfurile $A_1(1, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0)$; $A_3(0, 0, 1)$.

Răspuns. $-\frac{3}{2}.$

7. Să se calculeze integrala

$$\int_{\left(\frac{1}{3}, -2\right)}^{(3, 0)} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy$$

pe o curbă a cărei imagine nu intersectează hiperbola $xy = -1$.

Răspuns. $\ln 3.$

8. Stabilind că expresia $\omega(x, y, z) = (y^2 - 3x^2)dx + 2xydy$ este o diferențială totală să se găsească o funcție $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $dF = \omega$.

Răspuns. $F(x, y) = -x^3 + xy^2 + C.$

9. Stabilind în prealabil că expresia

$$\omega = \left(\frac{z+xy}{xz} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + x \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2+y^2} \right) dy + \frac{z-xy}{z^2} dz, \quad x > 0, \quad z > 0$$

este o diferențială totală să se găsească o funcție $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $dF = \omega$.

Răspuns. $F(x, y, z) = \ln xz - \arctg \frac{y}{z} + \frac{xy}{z} + C.$

LECȚIA 10 - INTEGRALA DUBLĂ

1. Noțiuni teoretice

Fie D o mulțime compactă din $\mathbb{R}^2$ astfel încât $D \subset [a, b] \times [c, d]$. Frontiera domeniului D este o curbă închisă alcătuită dintr-o reuniune finită de imagini de curbe netede. Să considerăm diviziunile:

$$\delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b),$$

$$\bar{\delta} = (c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d)$$

ale intervalului $[a, b]$, respectiv $[c, d]$. Paralelele la axa Oy prin punctele diviziunii δ și paralelele la axa Ox prin punctele diviziunii $\bar{\delta}$ împart dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$ în $n \times m$ dreptunghiuri de forma

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Să notăm cu Λ mulțimea dreptunghiurilor conținute în D sau care au puncte comune cu D .

Definiția 6.1. Vom numi diviziune a domeniului D mulțimea dreptunghiurilor $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ din Λ și vom nota $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$, ordinea de numerotare a dreptunghiurilor fiind arbitrară. Norma diviziunii Δ este egală cu

$$\|\Delta\| = \max \{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \mid 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m\} = \max \{\|\delta\|, \|\bar{\delta}\|\}.$$

Să considerăm diviziunile δ și $\bar{\delta}'$ ale intervalului $[a, b]$ și, respectiv, $[c, d]$ mai fine decât δ ; adică $\delta' \supset \delta$, $\bar{\delta}' \supset \bar{\delta}$. Acestor diviziuni le corespunde o diviziune Δ' a domeniului D care este mai fină decât Δ și $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$, deoarece $\|\delta'\| \leq \|\delta\|$, $\|\bar{\delta}'\| \leq \|\bar{\delta}\|$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Notăm cu

$$m_k = \inf \{f(x, y) \mid (x, y) \in \delta_k\}, \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$M_k = \sup \{f(x, y) \mid (x, y) \in \delta_k\}, \quad 1 \leq k \leq p$$

și definim $s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^p m_k \cdot \text{aria } \delta_k$, suma Darboux inferioară, respectiv

$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^p M_k \cdot \text{aria } \delta_k$, suma Darboux superioară asociată funcției f și diviziunii Δ .

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$ și $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos volumul corpului mărginit de suprafața $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, planul xOy și cilindrul cu

generatoarele paralele cu axa Oz și a cărei curbă directoare în planul xOy este frontiera lui D . Pentru f pozitivă suprafața este situată deasupra planului xOy și are ca proiecție pe acest plan pe D .

Fie $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq p$, un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ a domeniului D . Numărul real

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^p f(\xi_k, \eta_k) \cdot \text{aria } \delta_k$$

se numește suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq p$.

Propoziția 6.2

1. Dacă Δ' este o diviziune mai fină decât Δ , atunci

$$s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

2. Pentru orice diviziuni Δ și Δ' ale lui D avem:

$$s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta'}(f).$$

3. Pentru orice sumă Riemann $\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k)$, avem

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k) \leq S_{\Delta}(f).$$

Definiția 6.3. Spunem că funcția f este integrabilă Riemann pe D dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon} > 0$, astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui D cu $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq p$, rezultă că

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k) - I| < \varepsilon.$$

Numărul I cu această proprietate se notează:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

și se numește integrala dublă a lui f pe D . Domeniul D se numește domeniul de integrare, iar $dx dy$ se numește elementul de arie.

Teorema 6.4 (Criteriul lui Darboux)

Funcția mărginită $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe D dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon} > 0$, astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui D cu $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ să avem:

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon.$$

Din definiția integralei duble rezultă următoarele proprietăți (presupunem că integralele există):

a) aria domeniului D este dată de relația: $\text{aria } D = \iint_D dx dy$;

b) liniaritatea integralei duble este dată de formulele:

$$\iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy + \iint_D f_2(x, y) dx dy,$$

$$\iint_D \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

c) dacă D este împărțit în două subdomenii D_1 și D_2 printr-o curbă, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy;$$

d) dacă f este pozitivă pe D , adică $f(x, y) \geq 0$, $(\forall) (x, y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0;$$

e) dacă f este integrabilă pe D , atunci $|f|$ este integrabilă pe D și are loc inegalitatea:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

Teorema 6.5 Orice funcție continuă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe D .

Mulțimea funcțiilor integrabile pe D este mai bogată decât mulțimea funcțiilor continue, după cum va rezulta din următoarea teoremă.

Definiția 6.6. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^2$ se numește mulțime neglijabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un șir de dreptunghiuri deschise $(I_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2$, astfel încât:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aria}(I_n) < \varepsilon, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A.$$

Propoziția 6.7

a) Orice mulțime cel mult numărabilă $A = \{(x_n, y_n) | n \in \mathbb{N}^*\}$ este neglijabilă.

b) Dacă $A \subset B$ și B este neglijabilă, atunci A este neglijabilă.

c) Orice reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este o mulțime neglijabilă.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Notăm:

$$A_f := \{(x, y) \in D | (x, y) \text{ este punct de discontinuitate pentru } f\}.$$

Definiția 6.8. Funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se numește continuă aproape peste tot (prescurtat a.p.t.) dacă A_f este o mulțime neglijabilă.

Teorema 6.9 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)

O funcție $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă și numai dacă este mărginită și continuă aproape peste tot.

Teorema 6.10. Fie $f : D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și integrabilă pe D , astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ există integrala

$$\int_c^d f(x, y) dy := F(x).$$

Atunci funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$ și are loc formula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

În mod analog, avem și formula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

De obicei, se notează:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx &= \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right), \\ \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy &= \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right). \end{aligned}$$

În acest fel,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right).$$

Definiția 6.11. $D \subset \mathbb{R}^2$ se numește domeniul simplu în raport cu axa Oy dacă

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\},$$

unde funcțiile $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$, sunt continue.

$D \subset \mathbb{R}^2$ se numește domeniul simplu în raport cu axa Ox dacă

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\},$$

unde funcțiile $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_1 \leq \psi_2$, sunt continue.

Teorema 6.12. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și integrabilă, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ există integrala

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Atunci funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și are loc formula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Analog se scrie formula de calcul în cazul domeniilor simple în raport cu axa Ox. Într-adevăr, dacă

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

este un domeniu simplu în raport cu axa Ox, atunci are loc formula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Pentru calculul integralelor duble pe domenii mai complicate, împărțim aceste domenii cu ajutorul unor segmente paralele cu axele de coordonate, în subdomenii care sunt simple în raport cu axa Ox sau Oy, apoi folosim formulele anterioare și proprietatea de aditivitate a integralei duble.

Fie $D' \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact, raportat la sistemul de referință cartezian uOv , având frontiera Γ' , care este urma unei curbe închise netede. Să considerăm transformarea regulată

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v); \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1(D_1); \quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{pe } D_1 \subset \mathbb{R}^2,$$

unde D_1 este o mulțime deschisă ce conține compactul $D' \subset \mathbb{R}^2$. Atunci când (u, v) parcurge pe D' , (x, y) prin transformarea regulată T parcurge compactul $D \subset \mathbb{R}^2$ raportat la sistemul de referință cartezian xOy . În acest caz spunem că domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este imaginea domeniului $D' \subset \mathbb{R}^2$ prin transformarea regulată T și se scrie $D = T(D')$, iar frontiera Γ a domeniului este imaginea frontierei Γ' prin transformarea regulată T , adică $\Gamma = T(\Gamma')$. Dacă $\varphi, \psi \in C^2(D_1)$, are loc formula schimbării de variabilă în integrala dublă.

Teorema 6.13 (Formula schimbării de variabilă în integrala dublă)

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe D . Atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

Să considerăm trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la coordonatele polare (ρ, θ) prin transformarea regulată.

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}; \quad \rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \text{unde } \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho \neq 0.$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala dublă devine

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta, \quad D = T(D').$$

De asemenea, se folosește transformarea regulată care permite trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la coordonatele polare generalizate (ρ, θ) :

$$T: \begin{cases} x = a\rho \cos \theta; \\ y = b\rho \sin \theta, \end{cases} \quad \rho \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi], \quad \text{unde } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho \neq 0.$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala dublă devine

$$\iint_D f(x,y) dx dy = ab \iint_{D'} f(a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta, \quad D = T(D').$$

Principalele aplicații ale integralelor duble sunt:

a) Fie $D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un domeniu compact a cărui frontieră este urma unei curbe închise netede (sau netedă pe porțiuni). Aria domeniului D este dată de formula

$$\text{aria } D = \iint_D dx dy.$$

b) Fie funcția $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și pozitivă. Notăm cu Γ_f subgraficul lui f :

$$\Gamma_f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}.$$

Volumul lui Γ_f este: $\text{volum } \Gamma_f = \iint_D f(x,y) dx dy$

c) Să considerăm o placă materială plană neomogenă, de grosime neglijabilă, care are forma dată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$. Dacă $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ este densitatea plăcii materiale și ρ este presupusă continuă, atunci masa M a plăcii este

$$M = \iint_D \rho(x,y) dx dy.$$

Coordonatele (x_G, y_G) ale centrului de greutate al plăcii sunt de formulele:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x,y) dx dy; \quad y_G = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x,y) dx dy.$$

Dacă $\rho = \text{const.}$ (placa este omogenă), atunci

$$x_G = \frac{1}{\text{aria } D} \iint_D x dx dy; \quad y_G = \frac{1}{\text{aria } D} \iint_D y dx dy.$$

d) Fie o placă materială plană neomogenă de grosime neglijabilă, care are forma dată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ densitatea plăcii materiale. Momentul de inerție față de originea axelor de coordonate este dat de formula

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) dx dy.$$

Momentele de inerție I_{Ox} și I_{Oy} ale plăcii față de axele de coordonate Ox și Oy au expresiile: $I_{Ox} = \iint_D y^2 \rho(x,y) dx dy; I_{Oy} = \iint_D x^2 \rho(x,y) dx dy$. Are loc și $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$.

2. Probleme rezolvate

[1] Să se arate că funcția $f : [0,1] \times [2,3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^3$ este integrabilă.

Rezolvare. Funcția f este continuă pe domeniul de definiție, deci integrabilă.

[2] Funcția $f : [-1,1] \times [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este integrabilă?

Rezolvare. Observăm că funcția f este mărginită, deoarece $|f(x,y)| \leq 1$, $(\forall) x,y \in [-1,1]$. Pe de altă parte, f are un singur punct de discontinuitate, $(0,0)$. Conform criteriului lui Lebesgue f este integrabilă.

[3] Să se calculeze aria domeniului plan din $\mathbb{R}^2 : D = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$

Rezolvare.

$$\text{aria}(D) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{4-x^2} dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2) dx = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

[4] Să se calculeze integrala dublă: $I = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy \right) dx$.

Rezolvare. Se observă că:

$$\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

$$\text{Atunci: } I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

[5] $I = \iint_D xy dx dy$, unde D este domeniul mărginit de axa Ox și semicercul

superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Rezolvare. $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-2)^2}\}$,

$$I = \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy dy \right) dx = \int_1^3 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-2)^2}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 x (4x - x^2 - 3) dx = \frac{4}{3}.$$

Cu ajutorul unor schimbări de variabilă adecvate, să se calculeze integralele duble:

[6] $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, unde

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, a > 0\}.$$

Rezolvare. Vom trece la coordonate polare:

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \rho \in [0, a], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Rezultă:}$$

$$\int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \cdot \rho d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^a e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \Big|_0^a = \frac{\pi(1 - e^{-a^2})}{4}.$$

[7] $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy$; să se deducă valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Rezolvare. Folosind problema precedentă avem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\pi(1 - e^{-a^2})}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \text{ Rezultă că } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

[8] Să se calculeze integrala dublă improprie $I = \iint_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy$, unde D este

exteriorul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Rezolvare. Facem schimbarea de variabile

$$x = a\rho \cos \theta, y = b\rho \sin \theta, J = ab\rho, \text{ unde } \theta \in [0, 2\pi], \text{ iar } \rho \in [1, \infty).$$

$$\text{Rezultă: } I = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi ab}{e}.$$

[9] Să se afle volumul corpului mărginit de planul xOy , cilindrul $x^2 + y^2 = 1$ și planul $x + y + z = 3$.

Rezolvare.

$\text{Vol} = \iint_D (3 - x - y) dx dy$, unde D este proiecția pe planul xOy a intersecției dintre

planul $z = 3 - x - y$ și cilindrul $x^2 + y^2 = 1$, adică $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Atunci:

$$\text{Vol} = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} (3 - \rho \cos \theta - \rho \sin \theta) d\theta = 6\pi \int_0^1 \rho d\rho = 6\pi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^1 = 3\pi.$$

10 Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru un sector circular omogen cu raza R și $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Să notăm cu D domeniul din enunț. Avem

$$I_1 = \iint_D dx dy = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi R^2}{8},$$

$$I_2 = \iint_D x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3 \sqrt{2}}{6},$$

$$I_3 = \iint_D y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3 (2 - \sqrt{2})}{6}.$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4R\sqrt{2}}{3}; \quad y_G = \frac{I_3}{I_1} = \frac{4R(2 - \sqrt{2})}{3}.$$

11 Să se calculeze momentul de inerție față de axa Oy al plăcii plane materiale delimitată de $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, având densitatea $\rho(x, y) = xy$.

Rezolvare.

$$I_{0y} = \iint_D xyx^2 dx dy = \int_0^1 x^3 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y dy = \int_0^1 \frac{x^3(1-x)}{2} dx = \frac{1}{40}.$$

12 Să se calculeze momentul de inerție față de originea axelor al plăcii plane materiale omogene de densitate constantă ρ_0 , delimitată de $x^2 + y^2 = R^2$.

Rezolvare. Fie $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \rho d\rho = 2\pi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

13 Să se arate că mulțimea:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 \geq 2px, x^2 + y^2 \leq 8p^2\}, p > 0,$$

este măsurabilă Jordan și să se calculeze aria sa.

Rezolvare. Cum ∂E este o curbă cu tangentă continuă pe porțiuni deducem că este neglijabilă Jordan $\Rightarrow E$ este măsurabilă Jordan. Există mai multe modalități de a calcula aria mulțimii E .

(i) Folosind aditivitatea de domeniu și teorema Fubini:

$$\begin{aligned} \text{aria } E &= 2 \iint_{(\text{OAC})} dx dy = 2 \left[\int_0^{2p} \int_0^{\sqrt{2px}} dy dx + \int_{2p}^{2\sqrt{2}p} \left(\int_0^{\sqrt{8p^2-x^2}} dy \right) dx \right] = \\ &= 2 \left[\left(\sqrt{2p} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^{2p} + \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}p} + x\sqrt{8p^2-x^2} \right) \Big|_{2p}^{2\sqrt{2}p} \right] = \\ &= \frac{4p^2}{3} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

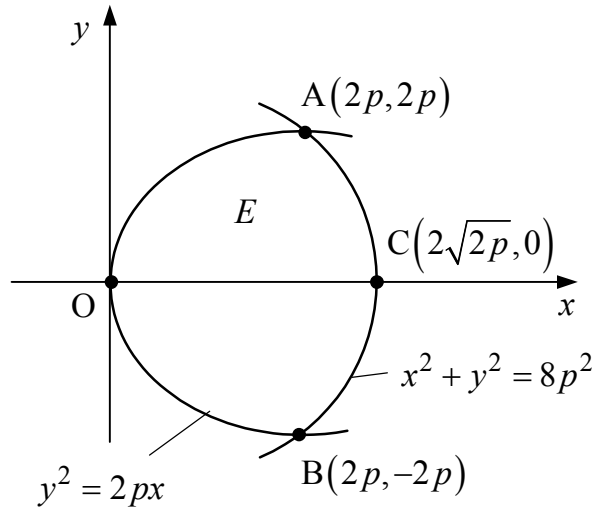


Fig. 6.1

(ii) Folosind faptul că domeniul E este simplu în raport cu axa Oy:

$$\text{aria } E = \int_{-2p}^{2p} \left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\sqrt{8p^2-x^2}} dx \right) dy = \int_{-2p}^{2p} \left(-\frac{y^2}{2p} + \sqrt{8p^2-x^2} \right) dy = \frac{4p^2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

14 Să se calculeze integrala

$$I = \iint_{[0,\pi] \times [a,b]} \frac{dx dy}{y - \cos x}, \quad 1 < a < b,$$

și apoi să se deducă valoarea integralei cu parametrii

$$J = \int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx.$$

Rezolvare. Funcția integrant este continuă pe domeniul de integrare. Mai mult, deoarece domeniul este simplu în raport cu ambele axe, putem folosi teorema lui Fubini în două moduri diferite:

$$I = \int_a^b \left(\int_0^{\pi} \frac{dx}{y - \cos x} \right) dy = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}} dy = \pi \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Pe de altă parte,

$$I = \int_0^{\pi} \left(\int_a^b \frac{dy}{y - \cos x} \right) dx = \int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx = J.$$

Am determinat astfel valoarea integralei J ca fiind:

$$J = \int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx = \pi \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

15 Să se calculeze integrala

$$I = \iint_{[0, \pi/2] \times [0, a]} \frac{dx dy}{1 + y \cdot \cos x}, \quad 0 < a < 1,$$

și apoi să se deducă valoarea integralei cu parametru

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} dx.$$

Rezolvare. Funcția integrant este continuă pe domeniul de integrare. Mai mult, deoarece domeniul este simplu în raport cu ambele axe, putem folosi teorema lui Fubini în două moduri diferite:

$$I = \int_0^a \left(\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + y \cdot \cos x} \right) dy = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} \arctg \sqrt{\frac{1 - y}{1 + y}} dy.$$

Folosind schimbarea de variabilă $y = \cos(2 \cdot u)$ obținem:

$$I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \cdot (\arccos a)^2.$$

Pe de altă parte,

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^a \frac{dy}{1 + y \cdot \cos x} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} dx = J.$$

Am determinat astfel valoarea integralei J ca fiind

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \cdot (\arccos a)^2.$$

Observăm că în integrala J funcția integrant poate fi prelungită prin continuitate. Într-adevăr:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} = a.$$

16 Să se calculeze integrala

$$\iint_D y dx dy, \text{ unde } D = \{(x, y) \mid y \leq x^2, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Rezolvare.

$$y + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ și } y = -2.$$

Dar $y \geq 0 \Rightarrow y = 1$ soluție acceptabilă $y = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$.

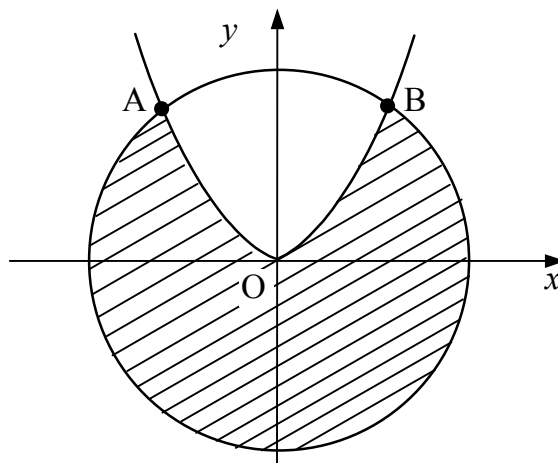


Fig. 6.2

Deci $A(-1, 1)$ și $B(1, 1)$

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^2} y dy \right) dx + \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^4 + x^2 - 2) dx = -\frac{7}{15}. \end{aligned}$$

Folosind aditivitatea de domeniu se putea calcula astfel:

$$\iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y dy \right) dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y dy \right) dx = -\frac{7}{15}.$$

17 Să se calculeze integrala $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde:

$$D = \{(x, y) \mid ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0, a > 0\}.$$

Rezolvare.

Utilizând transformarea în coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \rho \in [0, \infty); \\ y = \rho \sin \theta, \theta \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

domeniul D devine

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta) \mid \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \rho \in [a \cos \theta, 2a \cos \theta] \right\}.$$

Jacobianul transformării fiind egal cu ρ rezultă că:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Delta} \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a \cos \theta}^{2a \cos \theta} \rho^2 d\rho \right) d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3 \cos^3 \theta - a^3 \cos^3 \theta}{3} d\theta = \frac{7}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{7}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \frac{14}{9}. \end{aligned}$$

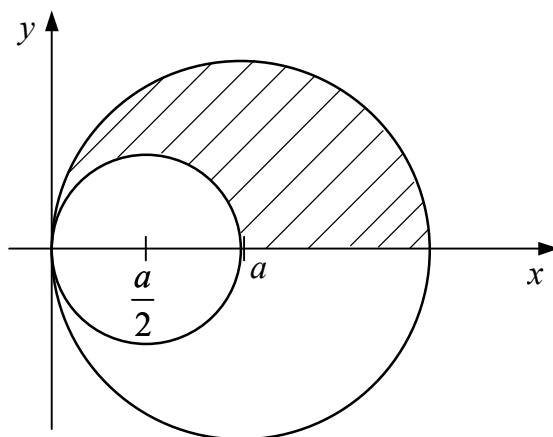


Fig. 6.3

18 Să se calculeze $\iint_D \sqrt{a^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2x}\right)^2} dx dy$, dacă D este interiorul cercului

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad a > 0.$$

Rezolvare. Trecând la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta; \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \rho \in [0, \infty); \theta \in [-\pi, \pi),$$

domeniul D devine

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta) \mid \rho \in [0, 2a \cos \theta], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

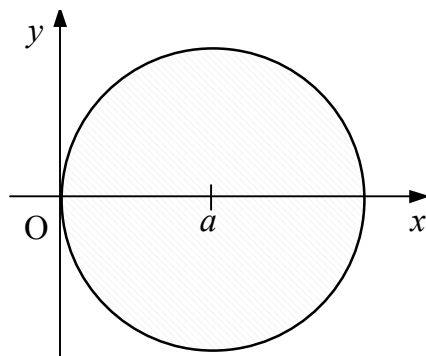


Fig. 6.4

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sqrt{a^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2x}\right)^2} dx dy &= \iint_{\Delta} \sqrt{a^2 - \left(\frac{\rho}{2\cos\theta}\right)^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \frac{1}{2\cos\theta} \sqrt{4a^2 \cos^2 \theta - \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos\theta} \left(\frac{-1}{3} \right) (4a^2 \cos^2 \theta - \rho^2)^{3/2} \Big|_0^{2a\cos\theta} d\theta = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6\cos\theta} 8a^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{4a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2a^3 \pi}{3}.
 \end{aligned}$$

3. Test de autoevaluare

1. Să se calculeze ariile domeniilor plane:

a) $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$; b) $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq y \leq 3x \right\}$.

Răspuns: a) πab ; b) $\frac{4\pi}{3}$.

2. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D x \sin(xy) dx dy$, unde $D = [0, 1] \times [0, \pi]$;

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, unde $D = \left\{ (x, y) \mid x \in [1, 2], \frac{1}{x} \leq y \leq x \right\}$.

Răspuns: a) 1; b) $\frac{9}{4}$.

3. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele:

a) $z = 0, x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3$; b) $z = xy^2, x^2 + y^2 = R^2, y = 0, x = 0$, aflat în primul cadran.

Răspuns: a) 3π ; b) $\frac{R^5}{15}$.

4. Să se calculeze masa unei plăci plane de grosime neglijabilă dacă densitatea

$$\rho(x, y) = x^2 + y^2, \text{ iar } D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Răspuns. $\frac{75\pi}{2}$.

5. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane de grosime neglijabilă cu densitatea $\rho(x, y) = y$ și care are forma dată de domeniul

$$D = \left\{ (x, y) \mid x + y \leq 2, y \geq x^2 \right\}.$$

Răspuns. $x_G = -\frac{25}{32}, y_G = \frac{235}{112}$.

6. Să se afle momentul de inerție în raport cu axa Ox a triunghiului delimitat de dreptele $x = 2, y = 2, x + y - 2 = 0$.

Răspuns. 4.

7. Să se calculeze aria figurii limitate de curbele

$$x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x; y = x \text{ și } y = 0.$$

Răspuns. Se trece la coordonate polare, $A = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

7. Să se calculeze integrala

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

dacă domeniul D este limitat de elipsa, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \in \mathbb{R}_+^*$. **Răspuns.** $\frac{2}{3}\pi ab$.

8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene limitată de curbele $x^2 = ay, x + y = 2a, a > 0$.

Răspuns. $\left\{ x_G = -\frac{a}{2}; y_G = \frac{8}{5}a \right\}$.

9. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$xy = a^2; x + y = \frac{5}{2}a, a > 0.$$

Răspuns. $\frac{15}{8} - 2\ln 2$.

LECȚIA 11 - INTEGRALA TRIPLĂ

1. Noțiuni teoretice

Fie V o mulțime compactă din $\mathbb{R}^3$, astfel încât $V \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Frontiera domeniului V este o reuniune de suprafețe netede. Să considerăm diviziunile

$$\begin{aligned}\delta &= (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b), \\ \bar{\delta} &= (c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d), \\ \bar{\bar{\delta}} &= (x = z_0 < z_1 < \dots < z_p = g)\end{aligned}$$

ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, g]$. Planele paralele cu planele zOz , zOx , xOy duse prin punctele diviziunilor δ , $\bar{\delta}$, $\bar{\bar{\delta}}$ împart paralelipipedul $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ în $n \times m \times p$ paralelipipe de forma:

$$I_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq p.$$

Să notăm cu Δ mulțimea paralelipipedelor conținute în V sau care au puncte comune cu V .

Definiția 7.1. Vom numi diviziune a domeniului V mulțimea paralelipipedelor $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ din Δ și o vom nota:

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r), \quad r = n \times m \times p,$$

ordinea de numerotare fiind arbitrară. Norma diviziunii Δ este egală cu

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p} \{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}, z_k - z_{k-1}\} = \max \{\|\delta\|, \|\bar{\delta}\|, \|\bar{\bar{\delta}}\|\}.$$

Să considerăm diviziunile $\delta, \bar{\delta}, \bar{\bar{\delta}}$ ale intervalelor $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$, care sunt mai fine decât $\delta, \bar{\delta}, \bar{\bar{\delta}} \supset \delta, \bar{\delta}' \supset \bar{\bar{\delta}}$. Acestor diviziuni le corespunde o diviziune Δ' a domeniului V care este mai fină decât Δ și $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$, deoarece

$$\|\delta'\| \leq \|\delta\|, \quad \|\bar{\delta}'\| \leq \|\bar{\delta}\|, \quad \|\bar{\bar{\delta}}'\| \leq \|\bar{\bar{\delta}}\|.$$

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Notăm cu

$$m_k = \inf \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \delta_k\}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

$$M_k = \sup \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \delta_k\}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

și cu v_k volumul paralelipipedului δ_k , $1 \leq k \leq r$. Definim

$$s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^r m_k \cdot v_k; \quad S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^r M_k \cdot v_k$$

suma Darboux inferioară, respectiv suma Darboux superioară asociată funcției f și diviziunii Δ .

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$ și $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos, masa unui corp neomogen de densitate variabilă $f(x, y, z) \geq 0$ și de volum V .

Fie $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq r$, un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ a domeniului V . Numărul real

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^r f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot v_k$$

se numește suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq r$.

Propoziția 7.2

1. Dacă Δ' este o diviziune mai fină decât Δ , atunci:

$$s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

2. Pentru orice diviziuni Δ și Δ' ale lui V avem:

$$s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta'}(f).$$

3. Pentru orice sumă Riemann $\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ avem

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) \leq S_{\Delta}(f).$$

Definiția 7.3. Spunem că funcția f este integrabilă Riemann pe $V \subset \mathbb{R}^3$ dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui V cu $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq r$, rezultă că:

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) - I| < \varepsilon.$$

Numărul I cu această proprietate se notează:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

și se numește integrala triplă (sau integrala de volum) a lui f pe V . Domeniul V se numește domeniul de integrare, iar $dx dy dz$ se numește elementul de volum.

Teorema 7.4 (Criteriul lui Darboux)

Funcția mărginită $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $V \subseteq D$ dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon} > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui V cu $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ să avem

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon.$$

Teorema 7.5. Orice funcție continuă $f: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe V .

Din definiția integralei triple rezultă următoarele proprietăți (presupunem că integralele există):

a) volumul domeniului V este $\text{volum } V = \iiint_V dx dy dz$;

b) liniaritatea integralei triple este dată de formulele:

$$\iiint_V [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f_1(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V f_2(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\iiint_V \alpha f(x, y, z) dx dy dz = \alpha \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

c) dacă V este împărțit în două subdomenii V_1 și V_2 printr-o suprafață, atunci:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz;$$

d) $f(x, y, z) \geq 0, \forall (x, y, z) \in V$ implică

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq 0;$$

e) are loc inegalitatea

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dx dy dz.$$

Calculul integralei triple se reduce la calculul succesiv a trei integrale simple.

Teorema 7.6. Fie $f : V = [a, b] \times [c, d] \times [e, g] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și integrabilă pe V , astfel încât pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ există integrala:

$$\int_e^g f(x, y, z) dz := F(x, y).$$

Atunci funcția $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ și are

$$\text{loc relația: } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dx dy,$$

unde am notat $D := [a, b] \times [c, d]$.

Definiția 7.7. $V \subset \mathbb{R}^3$ se numește domeniu simplu în raport cu axa Oz dacă

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \right\},$$

unde funcțiile $\varphi, \psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue.

Teorema 7.8. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axa Oz și $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și integrabilă astfel încât pentru orice $(x, y) \in D$ există integrala

$$\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz := F(x, y).$$

Atunci funcția $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe D și are loc relația:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu în raport cu axa Oy ,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\},$$

iar $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axa Oz ,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

atunci avem următoarea formulă de calcul pentru integrala triplă:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_D \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz dy.$$

Pentru calculul integralelor triple pe domenii mai complicate, împărțim aceste domenii cu ajutorul unor plane paralele cu planele de coordonate, în subdomenii care sunt simple în raport cu una din axe, apoi folosim formulele anterioare și proprietatea de aditivitate a integralei triple.

Fie $V' \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact, raportat la sistemul de referință cartezian $Ouvw$, având frontiera S' , care este o suprafață închisă netedă. Să considerăm transformarea regulată

$$T: \begin{cases} x = f(u, v, w); \\ y = g(u, v, w); \\ z = h(u, v, w), \end{cases} \quad f, g, h \in C^1(V_1); \quad \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \neq 0 \text{ pe } V \subset \mathbb{R}^3,$$

unde V_1 este o mulțime deschisă ce conține compactul $V' \subset \mathbb{R}^3$. Atunci când (u, v, w) parcurge pe V' , (x, y, z) prin transformarea regulată T parcurge compactul $V \subset \mathbb{R}^3$ raportat la sistemul de referință cartezian $Oxyz$. În acest caz, spunem că domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$ este imaginea domeniului $V' \subset \mathbb{R}^3$ prin transformarea regulată T și se scrie $V = T(V')$, iar frontiera S a domeniului V este imaginea frontierei S' prin transformarea regulată T , adică $S = T(S')$. În aceste condiții are loc formula schimbării de variabilă în integrala triplă.

Teorema 7.9. (Formula schimbării de variabilă în integrala triplă)

Fie $F: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe V . Atunci:

$$\iiint_V F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

Să considerăm trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice ρ, θ, φ prin

$$T : \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi; \\ z = \rho \cos \theta; \end{cases} \quad \rho \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi],$$

unde

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta.$$

În acest caz formula de schimbare de variabilă în integrala triplă devine:

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} F(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Mai general, se poate considera transformarea regulată

$$T : \begin{cases} x = a\rho \sin \theta \cos \varphi; \\ y = b\rho \sin \theta \sin \varphi; \\ z = \rho \cos \theta; \end{cases} \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi],$$

unde

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = abc\rho^2 \sin \theta,$$

care permite trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice generalizate ρ, θ, φ .

De asemenea, se utilizează trecerea de la coordonate carteziene la coordonate cilindrice prin transformarea regulată

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi; \\ z = z; \end{cases} \quad \rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, h],$$

unde

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho.$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala triplă devine:

$$\iiint_V F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Cele mai importante aplicații ale integralelor triple sunt:

a) Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact a cărui frontieră este urma unei suprafețe închise netede (sau netedă pe porțiuni). Volumul domeniului V este dat de formula

$$\text{volum}(V) = \iiint_V dx dy dz.$$

b) Să considerăm un corp material neomogen ce ocupă în spațiu domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ și presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct a corpului material dată de funcția continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$. Masa corpului material este

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

iar coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) sunt date de formulele:

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

c) Momentele de inerție față de axele de coordonate ale unui corp material, de densitate ρ care ocupă domeniul V , sunt date de egalitățile:

$$I_{Ox} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{Oy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{Oz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Momentele de inerție față de planele de coordonate ale aceluiași corp sunt

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{xOz} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_{yOz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

iar momentul de inerție față de originea axelor de coordonate este

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

d) Fie un corp material neomogen care ocupă în spațiu domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ și presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct al corpului material dată de funcția continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3$ și presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct al corpului material dată de funcția continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Potențialul newtonian al corpului în punctul $P(a, b, c)$ este dat de formula

$$U(a, b, c) = \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz,$$

unde $r(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ este distanța dintre punctul curent $M(x, y, z) \in V$ și punctul $P(a, b, c)$.

Corpul material neomogen atrage punctul material $P(a, b, c)$ de masă m cu o forță $\vec{F}$ (îndreptată spre corpul material) ale cărei proiecții pe axele de coordonate sunt:

$$F_x = K \cdot m \cdot \iiint_V \frac{x-a}{r^3(x, y, z)} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$F_y = K \cdot m \cdot \iiint_V \frac{y-b}{r^3(x, y, z)} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$F_z = K \cdot m \cdot \iiint_V \frac{z-c}{r^3(x, y, z)} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

unde K este constanta atracției universale.

2 Probleme rezolvate

1 Să se calculeze volumul corpului mărginit de $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z \leq 1 - y^2$, $x + y \leq 1$.

Rezolvare. Volumul unui corp este dat de expresia

$$\text{Vol} = \iiint_V dx dy dz,$$

unde

$$V = \{(x, y, z) \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - y^2\},$$

domeniu simplu în raport cu axa Oz (în spațiu) și axa Oy (în plan). Rezultă:

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - y^2) dy = \int_0^1 \left(1 - x - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(1 - x - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

2 Să se calculeze volumul corpului sferic

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Rezolvare. Coordonatele sferice ρ, θ, φ sunt legate de coordonatele carteziane prin relațiile

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

cu

$$0 \leq \rho \leq R, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi] \text{ și } J = \rho^2 \sin \theta \text{ (Jacobianul).}$$

Așadar:

$$\iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R \rho^2 \sin \theta d\rho = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

3 Să se calculeze volumul elipsoidului

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Rezolvare. Aplicăm coordonatele sferice generalizate

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c\rho \cos \theta$$

Cu $0 \leq \rho \leq 1$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jacobianul transformării este $J = abc\rho^2 \sin \theta$.

$$\text{Vol} = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 abc\rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Dacă $a = b = c = R$, se obține volumul corpului sferic.

4 Să se calculeze volumul cilindrului

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \right\}.$$

Rezolvare. Trecând la coordonate cilindrice

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z \text{ și } J = \rho,$$

obținem:

$$\text{Vol} = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \int_0^h dz = 2\pi \frac{R^2}{2} h = \pi R^2 h.$$

5 Să se calculeze următoarele integrale triple:

$$I = \iiint_V xyz dx dy dz,$$

unde V este delimitat de suprafețele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Rezolvare. Domeniul

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y \right\}$$

este un domeniu simplu în raport cu axa Oz. Rezultă:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy \\
&= \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy = \left(\frac{xy^2}{4} + \frac{x^3 y^2}{4} + \frac{xy^4}{8} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2 y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} = \\
&= \frac{(x+x^3)(1-x)^2}{4} + \frac{x(1-x)^4}{8} - \frac{x^2(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3(x^2-x)}{3} = \frac{x(1-x)^4}{24}.
\end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{24} dx = \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) dx = \\
&= \frac{1}{24} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{720}.
\end{aligned}$$

[6] $I = \iiint_V x^2 y^2 z^2 dz dy dx$, unde V este elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Rezolvare. Facem schimbarea de variabile $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$ cu $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $J = abc\rho^2 \sin \theta$.

$$\begin{aligned}
I &= a^3 b^3 c^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^8 d\rho = \\
&= \frac{a^3 b^3 c^3}{9} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta = \\
&= \frac{16a^3 b^3 c^3}{945} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{4a^3 b^3 c^3}{945} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \\
&= \frac{4a^3 b^3 c^3}{945} \left(\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3 b^3 c^3}{945}.
\end{aligned}$$

[7] Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului cuprins între paraboloidul $z = 1 - x^2 - y^2$ și planul $z = 0$.

Rezolvare. Calculăm volumul și momentele statice față de planele de coordonate

$$V = \iiint_V dx dy dz = \iint_D dx dy \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) = \iint_D (1-x^2-y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (1-\rho^2) d\rho = \frac{\pi}{2}, \text{ unde } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$S_{yOz} = \iiint_V x dx dy dz = \iint_D x dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} dz = \iint_D x (1-x^2-y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^2 (1-\rho^2) d\rho = \frac{4}{15} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \frac{4}{15} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$S_{xOz} = \iiint_V y dx dy dz = \iint_D y dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} dz = \iint_D y (1-x^2-y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \rho^2 (1-\rho^2) d\rho \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{4}{15} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{4}{15} (-\cos \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$S_{xOy} = \iiint_V z dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} z dz =$$

$$= \iint_D (1-x^2-y^2)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{S_{yOz}}{V} = 0; \quad y_G = \frac{S_{xOz}}{V} = 0; \quad z_G = \frac{S_{xOy}}{V} = \frac{1}{3}.$$

8 Să se calculeze momentul de inerție față de planul (yOz) al unui sfere cu centrul în origine și de densitate constantă ρ .

Rezolvare.

$$I_{yOz} = \rho_0 \iiint_V x^2 dx dy dz, \text{ unde}$$

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Folosind coordonatele sferice

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta, \quad j = \rho^2 \sin \theta$$

se obține

$$I_{yOz} = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

9 Să se calculeze integrala $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$, domeniul V fiind limitat de

suprafețele $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 1$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz &= \iint_{pr_{xOy} V} \left(\int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy. \end{aligned}$$

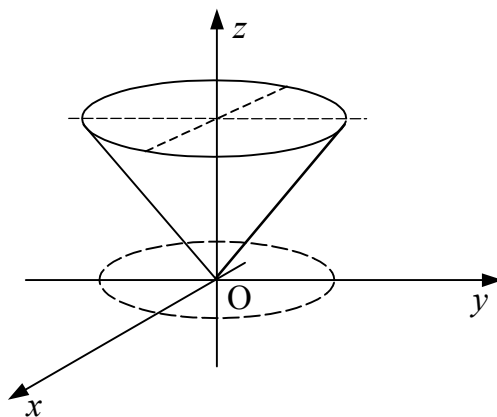


Fig. 7.1

Trecând la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & \rho \in [0, \infty); \\ y = \rho \sin \theta, & \theta \in [0, 2\pi), \end{cases}$ domeniul

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ devine $\Delta = \{(\rho, \theta) | \rho \in (0, 1], \theta \in [0, 2\pi)\}$ și deoarece

Jacobianul transformării este $\rho \neq 0$ obținem că:

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho) \, d\rho d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

10 Să se calculeze valoarea integralei

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s \, dx dy dz, \quad p, q, r, s > 0,$$

unde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z - 1 \leq 0, x, y, z \geq 0\}$.

Rezolvare. Funcția integrant este continuă și domeniul este simplu în raport cu Oz.

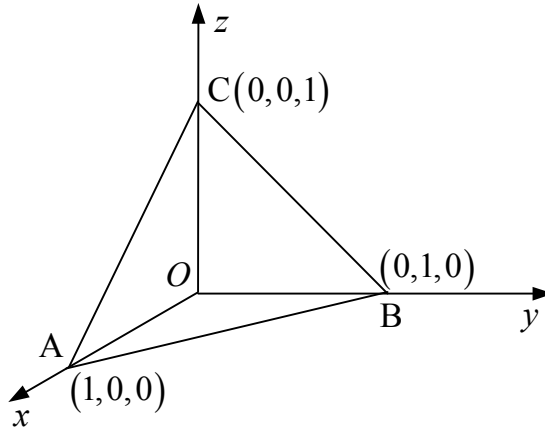


Fig. 7.2

Folosind teorema lui Fubini deducem

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz = \iint_{AOB} \left(\int_0^{1-x-y} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dz \right) dz dy.$$

Făcând în această integrală schimbarea de variabilă $z = (1-x-y)u$, integrala devine:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{AOB} x^p y^q \left(\int_0^1 (1-x-y)^{r+s+1} u^r (1-u)^s du \right) dx dy = \\ &= B(r+1, s+1) \int_0^1 \int_0^{1-x} x^p y^q (1-x-y)^{r+s+1} dx dy. \end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabilă $y = (1-x)v$ integrala devine

$$\begin{aligned} I &= B(r+1, s+1) \int_0^1 \int_0^1 x^p (1-x)^{q+r+s+2} v^q (1-v)^{r+s+1} dv dx = \\ &= B(r+1, s+1) B(q+1, r+s+2) B(p+1, q+r+s+3) = \\ &= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \end{aligned}$$

11 Să se afle volumul corpului Ω limitat de suprafețele $x^2 + y^2 = az$ și $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$).

Rezolvare. Paraboloidul de rotație $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ și conul $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ se intersectează după cercul $z = a$, $x^2 + y^2 = a^2$ a cărui proiecție în planul xOy este $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$.

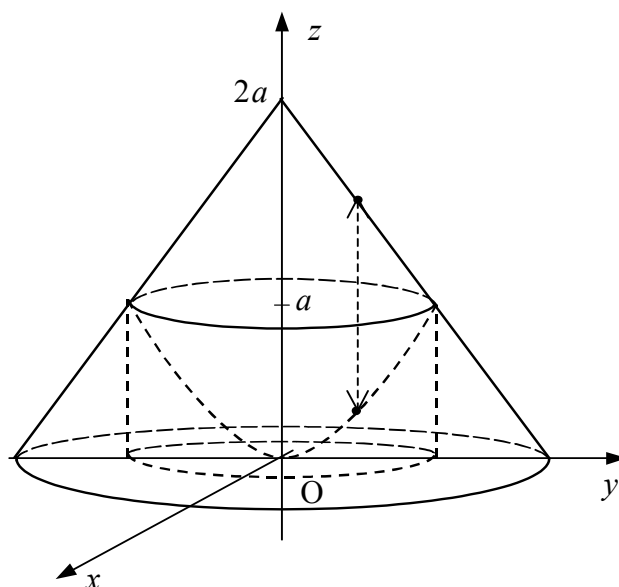


Fig. 7.3

În aceste condiții volumul corpului Ω va fi

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(2a - \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{a} \right) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[2a\rho - \rho^2 - \frac{\rho^3}{a} \right] d\rho d\theta = \frac{5\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

12 Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ și $x^2 + y^2 \leq z^2$.

Rezolvare. Sfera $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ intersectează conul $z^2 = x^2 + y^2$ după curba $z = a$, $x^2 + y^2 = a^2$ care se proiectează în planul xOy în curba $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$. În aceste condiții volumul corpului limitat de cele două suprafețe va fi

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\rho^2 - a\rho + \rho\sqrt{a^2 - \rho^2} \right) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + \frac{1}{3}a^3 \right) d\theta = \frac{\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

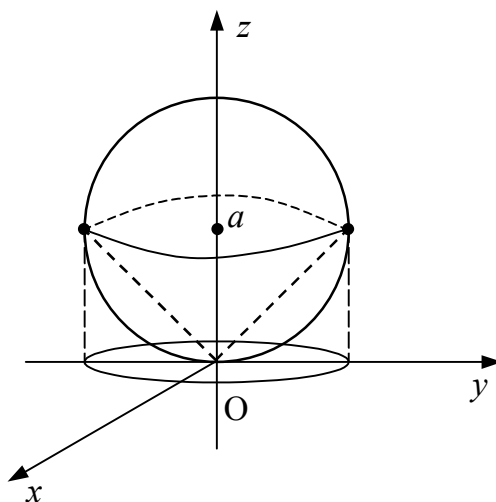


Fig. 7.4

13 Să se calculeze volumul corpului cuprins între suprafețele $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ și $x = -1, x = 2$.

Rezolvare. Corpul cuprins între cilindrii $z = 4 - y^2$ și $z = y^2 + 2$ se proiectează în planul yOz în domeniul ABCD.

În aceste condiții volumul corpului va fi

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-1}^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{y^2+2}^{4-y^2} dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^2 \left(\int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy \right) dx = \left(4 - \frac{4}{3} \right) 3 = 8. \end{aligned}$$

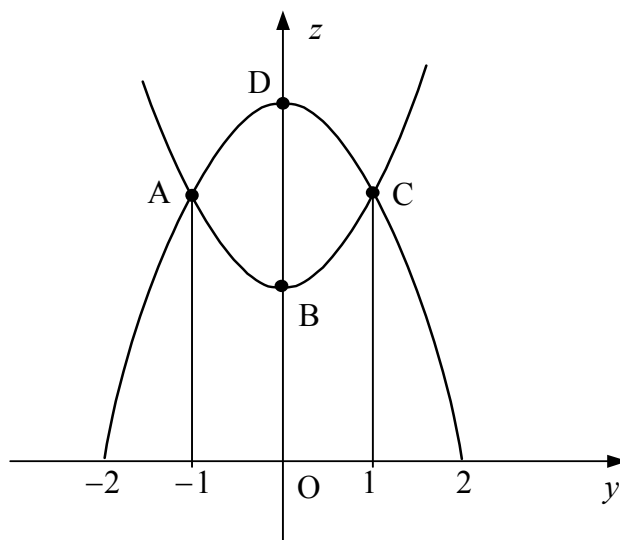


Fig. 7.5

14 Determinați centrul de greutate al unui corp având forma unei semisfere $z \geq 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ știind că densitatea într-un punct oarecare al solidului este proporțională cu distanța de la acest punct la centrul sferei.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate se calculează cu ajutorul formulelor:

$$x_G = \frac{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) x dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz}; \quad y_G = \frac{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) y dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz};$$

$$z_G = \frac{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz},$$

unde $\gamma(x, y, z)$ este densitatea corpului Ω în punctul (x, y, z) .

Trecând la coordonate sferice, vom obține relațiile

$$M = \iiint_{\Omega} k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a k \cdot \rho \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= k \frac{a^4}{4} \cdot 2\pi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\pi a^4}{2}$$

$$M_x = \iiint_{\Omega} x \cdot k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \sin \theta \cos \varphi \cdot \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = 0$$

$$M_y = \iiint_{\Omega} y \cdot k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \sin \theta \sin \varphi \cdot \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = 0$$

$$M_z = \iiint_{\Omega} z \cdot k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \cos \theta \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= k \frac{a^5}{5} 2\pi \left(-\frac{\cos 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ka^5\pi}{5}.$$

Obținem deci $x_G = 0$, $y_G = 0$ și $z_G = \frac{2a}{5}$.

15 Calculați integrala

$$\int_0^{2r} \left(\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} 3(x^3 + y^2) dz \right) dy \right) dx,$$

determinând domeniul de integrare.

Rezolvare. Domeniul de integrare Ω este determinat de intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 2rx$ cu semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ ($z \geq 0$).

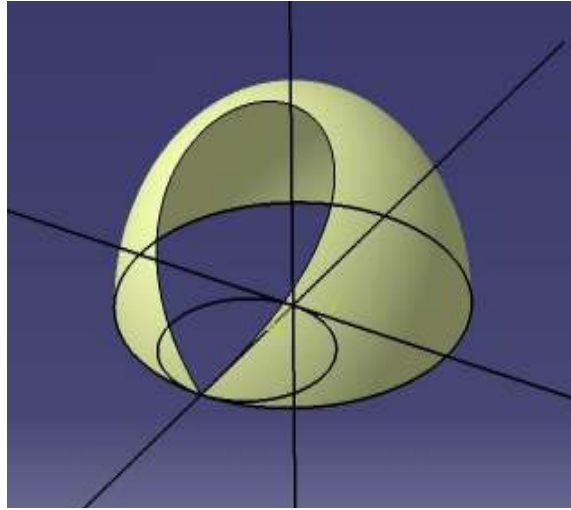


Fig. 7.6

Trecând la coordonate cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & \rho \geq 0, \\ y = \rho \sin \theta, & \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ z = z, & z \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

integrala devine

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2) dx dy dz &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 2rx} \left(3(x^2 + y^2) \int_0^{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}} dz dx dy \right) = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2r \cos \theta} 3\rho^2 \sqrt{4r^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \right) = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2r \cos \theta} 3\rho^3 \sqrt{4r^2 - \rho^2} d\rho \right) d\theta = r^5 \left(\frac{1036}{75} + \frac{64}{5} \pi \right). \end{aligned}$$

16 Să se calculeze integrala

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

dacă Ω este domeniul compact mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$.

Rezolvare. Trecând la coordonate sferice generalizate

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, & \rho \in [0, 1], \\ y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, & \theta \in [0, \pi], \\ z = c\rho \cos \theta, & \varphi \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = abc\rho^2 \sin \theta$ și integrala devine

$$J = abc \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = abc \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{16} \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

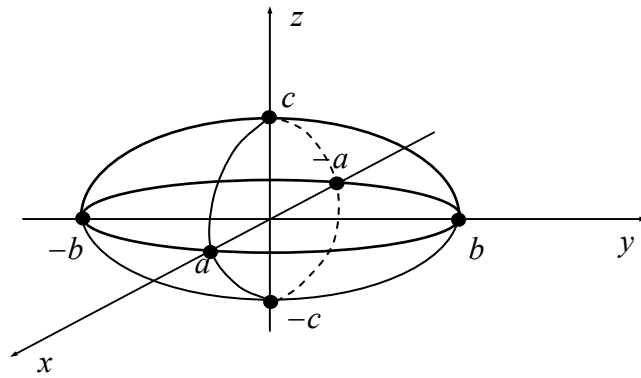


Fig. 7.7

3. Test de autoevaluare

1. Să se calculeze volumele domeniilor din $\mathbb{R}^3$:

a) $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;

b) $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, x^2 + y^2 \leq 4z\}$

Răspuns : a) $\frac{\pi a^4}{2}$; b) $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 4)$.

2. Să se calculeze: $\iiint_V 45x^2 y dx dy dz$, unde

$$V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z \leq 8\}.$$

Răspuns. 128.

3. $\iiint_V z dx dz dy$, unde domeniul V este mărginit de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ și

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Răspuns. $\frac{5\pi R^4}{24}$.

4. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate a jumătății superioare a unui elipsoid omogen de semiaxe a, b, c .

Răspuns. $x_G = 0$; $y_G = 0$; $z_G = \frac{3c}{8}$.

5. Să se calculeze

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

Răspuns. $\pi\sqrt{\pi}$.

6) Să se calculeze $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ dacă domeniul

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z \geq 0, r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}, \quad r, R \in \mathbb{R}_+^*; \quad r < R.$$

Răspuns. $\frac{4}{15}\pi(R^5 - r^5)$.

7. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele următoare:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16; \quad z^2 = x^2 + y^2;$$

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

Răspuns. $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}\pi.$

8. Să se calculeze $\iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ dacă domeniul Ω este limitat de suprafața $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Răspuns. $\frac{4}{5}\pi abc.$

9. Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafețele

$$az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0).$$

Răspuns. $\frac{\pi a^3}{6}.$

10. Să se calculeze volumul corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ și suprafața $x^2 + y^2 = 3z$ (interiorul acestei suprafețe).

Răspuns. $\frac{19\pi}{6}.$

11. Din porțiunea bilei $x^2 + y^2 + z^2 \leq c$ aflată în primul octant ($x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$) se decupează un corp OABC limitat de planele de coordonate și de planul $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ ($a \leq c; b \leq c$) $a, b, c > 0.$

Determinați masa acestui corp dacă în fiecare punct densitatea sa este egală cu $z.$

Răspuns. $\frac{ab}{24}(6c^2 - a^2 - b^2).$

12. Determinați coordonatele centrului de greutate și momentele de inerție ale piramidei formată de planele $x = 0, y = 0, z = 0; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$

Răspuns.
$$\begin{cases} x_G = \frac{a}{4}, y_G = \frac{b}{4}, z_G = \frac{c}{4}; \\ J_x = \frac{a^3 bc}{60}, J_y = \frac{b^3 ac}{60}, J_z = \frac{c^3 ab}{60}; \\ J_0 = \frac{abc}{60}(a^2 + b^2 + c^2). \end{cases}$$

LECȚIA 12 - INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

1. Noțiuni teoretice

Definiția 8.1. Se numește pânză parametrizată netedă orice aplicație $s : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă D .

În felul acesta oricărui punct $(u, v) \in D$ îi corespunde un punct $s(u, v)$ din $\mathbb{R}^3$ având coordonatele

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), & (u, v) \in D. \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

Aceste relații se numesc ecuațiile parametrice ale pânzei s sau reprezentarea parametrică a pânzei s . Pânza s se numește simplă dacă s este injectivă. Mulțimea $S := s(D)$ se numește urma pânzei s . De multe ori notăm suprafața cu S .

Definiția 8.2. O pânză netedă $s : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$s(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

se numește nesingulară dacă în fiecare punct $(u, v) \in D$, matricea jacobiană a lui s

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

are rangul maxim, adică are rangul doi.

În spațiu alegem reperul ortogonal Oxyz de versori i, j, k . Atunci punctul curent $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ al urmei lui s are vectorul de poziție r dat de relația

$$r(u, v) = f(u, v)i + g(u, v)j + h(u, v)k.$$

Să considerăm vectorii

$$\begin{aligned} \bar{r}_u(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\bar{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\bar{j} + \frac{\partial h}{\partial u}(u, v)\bar{k}, \\ \bar{r}_v(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\bar{i} + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\bar{j} + \frac{\partial h}{\partial v}(u, v)\bar{k}. \end{aligned}$$

Fie $(u_0, v_0) \in D$. Planul care trece prin punctul $P(x_0, y_0, z_0)$, unde $x_0 = f(u_0, v_0)$, $y_0 = g(u_0, v_0)$, $z_0 = h(u_0, v_0)$, paralel cu vectorii $r_u(u_0, v_0)$ și $r_v(u_0, v_0)$ se numește planul tangent la s în punctul (u_0, v_0) . Acest plan are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Versorul-normală la suprafața s în punctul (u_0, v_0) este

$$\bar{n}(u_0, v_0) = \frac{\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0)}{\|\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0)\|}, \text{ unde } \bar{r}_u \times \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dacă notăm cu $A = \frac{D(g, h)}{D(u, v)}$, $B = \frac{D(h, f)}{D(u, v)}$, $C = \frac{D(f, g)}{D(u, v)}$, observăm că

$\|\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0)\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ și versorul-normalei la suprafața s în punctul (u_0, v_0) are expresia $\bar{n} = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, unde am renunțat la specificarea punctului (u_0, v_0) .

Dacă notăm cu $E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v}$, $G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2$ atunci avem identitatea $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 > 0$.

Două pânze parametrizate netede $s: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $s_1: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (D și D_1 deschiși) se numesc echivalente și se notează $s \sim s_1$, dacă există o funcție bijectivă $\varphi: D \rightarrow D_1$, $\varphi \in C^1(D)$, $\varphi^{-1} \in C^1(D)$, astfel încât jacobianul lui φ să fie strict pozitiv în fiecare punct al deschisului D și $s_1 \circ \varphi = s$. Funcția φ se numește schimbare de parametri.

Dacă $s \sim s_1$, atunci urmele celor două pânze parametrizate netede coincid. Relația „ $\sim$ ” este o relație de echivalență în mulțimea pânzelor parametrizate netede.

Definiția 8.3. Se numește suprafață parametrizată netedă o clasă de echivalență de pânze parametrizate netede.

Să considerăm suprafața $s: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ netedă, definită pe mulțimea deschisă D_1 , având reprezentarea parametrică:

$$s: \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), \quad (u, v) \in D_1. \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

Dacă $D \subset D_1$ este un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, atunci mulțimea $s(D) = S$ reprezintă o porțiune din suprafața netedă dată. Presupunem că suprafața s este simplă și nesingulară.

Definiția 8.4. Se numește aria porțiunii de suprafață $S \subset \mathbb{R}^3$ numărul real pozitiv:

$$\text{aria } S = \iint_D \|r_u \times r_v\| du dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Forma diferențială $d\sigma = \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| du dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$ se numește elementul de arie al suprafeței S .

Integrala dublă $\iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$ este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeței S .

Dacă suprafața S este dată explicit de ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$,

Atunci aria $S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$, unde $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și suprafața netedă, simplă, nesingulară

$$s: \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), \quad (u, v) \in D, \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

unde $f, g, h \in C^1(D)$. Să considerăm funcția $F: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ și o diviziune $\delta = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ a suprafeței S . Definim suma

$$\sigma_\delta(F, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^p F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \text{aria } s_k,$$

unde $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in s_k$, $1 \leq k \leq p$. Deoarece $\begin{cases} \xi_k = f(u_k, v_k) \\ \eta_k = g(u_k, v_k), \quad 1 \leq k \leq p, \\ \zeta_k = h(u_k, v_k) \end{cases}$

rezultă că $\sigma_\delta(F, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^p F(f(u_k, v_k), g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)) \cdot \text{aria } s_k$.

Diviziunii δ a suprafeței S îi corespunde o diviziune Δ a domeniului D , iar porțiunilor de suprafață $s_1, s_2, \dots, s_p$ le corespund subdomeniile $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$. Așadar, $(u_k, v_k) \in \delta_k$, $1 \leq k \leq p$.

Definiția 8.5. Dacă pentru orice șir de diviziuni $(\delta_n)_{n \geq 1}$ ale suprafeței S cu proprietatea că $\|\delta_n\| \rightarrow 0$, șirul sumelor $(\sigma_{\delta_n})_{n \geq 1}$ are o aceeași limită finită, atunci șirului $(\sigma_{\delta_n})_{n \geq 1}$ se numește integrala de suprafață de primul tip pe suprafața S și se notează

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma.$$

Teorema 8.6. În condițiile de mai sus, dacă $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă atunci:

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv.$$

Dacă suprafața S este dată de $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_S F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \text{ unde } p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Propoziția 8.7.

a) Dacă F și G sunt funcții continue pe un deschis care conține S și α, β sunt constante reale, atunci:

$$\iint_S (\alpha F + \beta G) d\sigma = \alpha \iint_S F d\sigma + \beta \iint_S G d\sigma.$$

b) Dacă S este juxtapunerea a două porțiuni disjuncte S_1, S_2 de suprafață, atunci:

$$\iint_S F d\sigma = \iint_{S_1} F d\sigma + \iint_{S_2} F d\sigma.$$

c) Aria unei porțiuni de suprafață S este aria $S = \iint_S d\sigma$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și suprafața netedă simplă, nesingulară

$$s : \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), \quad (u, v) \in D, \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

unde $f, g, h \in C^1(D)$. Fie $M(x, y, z)$ un punct al lui $S = s(D)$. Putem considera în punctul M doi versori-normală la S :

$$\bar{n}_1 = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \bar{n}_2 = -\frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

având sensuri opuse.

Suprafața S se numește orientabilă dacă în fiecare punct din S este definit un versor-normală și aplicația $(x, y, z) \mapsto \bar{n}(x, y, z)$ este continuă. Suprafața orientabilă S împreună cu unul din cei doi versori-normală se numește suprafață orientală.

O suprafață S în $\mathbb{R}^3$ se numește închisă dacă există o aplicație bijectivă

$$\varphi: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \rightarrow S,$$

astfel încât φ și φ^{-1} să fie continue (adică sfera unitate și suprafața S sunt homeomorfe).

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață orientabilă. Dacă S este închisă, atunci în fiecare punct din S este definit versorul-normală. Notăm cu $\bar{n}_e$ versorul normalei exterioare (care iese din domeniul mărginit de S) și cu $\bar{n}_i$ versorul normalei interioare ($\bar{n}_i = -\bar{n}_e$). În primul caz, perechea $\{S, \bar{n}_e\}$ se numește fața exterioară și se notează cu S_e , iar perechea $\{S, \bar{n}_i\}$ se numește fața interioară și se notează cu S_i .

Dacă S este neînchisă, proiectabilă pe planul xOy , atunci vom numi fața exterioară a suprafeței S în raport cu planul Oxy perechea $\{S, \bar{n}_e\}$, notată S_e , unde $\bar{n}_e$ este versorul-normală care face un unghi ascuțit cu axa Oz . Fața interioară a suprafeței S va fi $\{S, \bar{n}_i\}$, notată S_i , cealaltă față a lui S , adică fața pentru care versorul-normală face un unghi obtuz cu axa Oz .

Fie C conturul suprafeței S și Γ proiecția lui C pe planul Oxy . Pe C se pot considera două sensuri de parcurs. Sensul asociat suprafeței exterioare este acela care corespunde sensului direct (pozitiv) pe conturul Γ . Feței interioare i se asociază sensul invers (negativ). În acest mod se definește un sens de parcurs pe conturul oricărei părți din suprafața S . Totodată am indus o orientare și pe domeniul D din planul Ouv .

Dacă $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ sunt cosinușii directori ai versorului-normală n la suprafața S atunci

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Fie $R = R(x, y, z): S \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe suprafața orientată S .

Definiția 8.8. Fie $F: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o funcție vectorială continuă pe domeniul V , domeniu care conține suprafața S ,

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}.$$

Integrala de suprafață de al doilea tip a funcției vectoriale F pe suprafața S_e sau fluxul câmpului vectorial F prin suprafața S_e sau fluxul câmpului vectorial F prin suprafața S_e , cu notația:

$$\iint_{S_e} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy \Leftrightarrow \Phi_{S_e}(F) = \iint_{S_e} F \cdot n d\sigma,$$

se definește prin egalitatea:

$$\iint_{S_e} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

În mod asemănător se definește

$$\iint_{S_i} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = - \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

Utilizând regula de calcul a integralei de suprafață de primul tip, rezultă că

$$\begin{aligned} \iint_{S_e} P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_S \frac{PA + QB + RC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} d\sigma = \iint_D (PA + QB + RC) dudv \end{aligned}$$

Am obținut regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip

$$\iint_{S_e} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_S (PA + QB + RC) dudv,$$

unde $P = P(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, $Q = Q(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$,
 $R = R(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, iar $A = A(u, v)$, $B = B(u, v)$, $C = C(u, v)$.

Dacă folosim scrierea vectorială, rezultatele anterioare devin:

$$\begin{aligned} \iint_{S_e} P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_S \bar{F} \cdot \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|} d\sigma = \\ &= \iint_S \frac{(\bar{F}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|} d\sigma = \iint_D (\bar{F}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) dudv, \end{aligned}$$

unde produsul mixt este

$$(\bar{F}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

În cazul în care suprafața netedă este de ecuație $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Atunci versorul-normală $\bar{n}_e$, corespunzător feței exterioare S_e , este

$$\bar{n}_e = \frac{-p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

iar versorul-normală $\bar{n}_i$, corespunzător feței interioare S_i , este $\bar{n}_i = -\bar{n}_e$.

Să considerăm o placă materială neomogenă curbă, de grosime neglijabilă, care are forma dată de urma S a suprafeței s din spațiu. Presupunem cunoscută în fiecare punct al plăcii materiale dată de funcția continuă $\rho(x, y, z)$. În acest caz, pentru placa materială se pot calcula:

a) masa M a plăcii: $M = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma$;

b) coordonatele centrului de greutate G al plăcii:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_S x \rho(x, y, z) d\sigma, y_G = \frac{1}{M} \iint_S y \rho(x, y, z) d\sigma, z_G = \frac{1}{M} \iint_S z \rho(x, y, z) d\sigma;$$

c) momentele de inerție ale plăcii materiale în raport cu axele de coordonate:

$$I_{Ox} = \iint_{(S)} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma, I_{Oy} = \iint_{(S)} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma,$$

$$I_{Oz} = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\sigma;$$

d) momentele de inerție ale plăcii materiale în raport cu planele de coordonate:

$$I_{xOy} = \iint_{(S)} z^2 \rho(x, y, z) d\sigma, I_{yOz} = \iint_{(S)} x^2 \rho(x, y, z) d\sigma, I_{xOz} = \iint_{(S)} y^2 \rho(x, y, z) d\sigma$$

e) momentele de inerție ale plăcii materiale în raport cu originea:

$$I_O = \iint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma.$$

2. Probleme rezolvate

1 Să se stabilească dacă paraboloidul eliptic

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}^*$$

este o suprafață orientabilă.

Rezolvare. Observăm că $\bar{n} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, 1 \right)$ și

$\|\bar{n}\| = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + 1} \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Deoarece $\bar{n} = \bar{n}(x, y)$ este o funcție continuă nenulă pe $\mathbb{R}^2$, deci suprafața este orientabilă.

2 Să se calculeze aria suprafeței $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

Rezolvare. Din simetria figurii față de planul xOy , Aria $S = 2 \iint_S d\sigma$, unde S este suprafața care are reprezentarea carteziană:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Observăm că

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}} dx dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\text{Aria } S = 2 \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta \int_0^a \rho d\rho + 2 \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$\int_0^a \rho d\rho = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin \theta) \Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} = \frac{a^2 \pi}{\sqrt{2}}.$$

[3] Să se calculeze aria decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$, $a > 0$, în emisfera superioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Rezolvare. Ecuația emisferei superioare este $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ și

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

$$\text{Aria} = \iint_D \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

unde D este proiecția pe planul xOy a suprafeței decupată de cilindru în suprafața emisferei

$$\begin{aligned} \text{Aria} &= a \int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{ay-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \int_0^a \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right]_{x=-\sqrt{ay-y^2}}^{x=\sqrt{ay-y^2}} dx = \\ &= 2a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{y}{a+y}} dy = a^2 (\pi - 2). \end{aligned}$$

[4] Să se calculeze integrala de suprafață $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, unde S este suprafața

laterală a conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$; $0 \leq z \leq b$, $a > 0$.

Rezolvare. Observăm că $z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$, și

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} dx dy$$

$$\text{Atunci } I = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde D este proiecția pe planul xOy a suprafeței S , adică $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

$$I = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}.$$

[5] Să se calculeze $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} d\sigma$,

unde S este emisfera superioară $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, $a \neq 0$.

Rezolvare. O reprezentare parametrică a lui S este $x = a \sin \theta \cos \varphi$,
 $y = a \sin \theta \sin \varphi$, $z = a \cos \theta$, cu $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Avem

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = a^2, G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2 \sin^2 \theta$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \text{ deci } d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 + 3a^2 \cos^2 \theta}} d\theta = -2\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos \theta)}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}} =$$

$$= \frac{-2\pi a}{\sqrt{3}} \ln \left(\sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi a}{3} \ln(2 + \sqrt{3}).$$

[6] Să se calculeze integrala de suprafață $I = \iiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$,

unde S este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$.

Rezolvare. Versorul normală $\vec{n}$ al feței exterioare a sferei este $\vec{n} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$

$$I = \iint_S \left(\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} + \frac{z^2}{R} \right) d\sigma = \iint_S \frac{R^2}{R} d\sigma = R \iint_S d\sigma = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

[7] Să se calculeze $I = \iiint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$,

unde S este fața exterioară a suprafeței

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, a > 0 \right\}.$$

Rezolvare. O parametrizare a suprafeței S este

$$x = a \sin \theta \cos \varphi; \quad y = a \sin \theta \sin \varphi; \quad z = a \cos \theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Deducem $A = a^2 \cos \varphi \sin^2 \theta$, $B = a^2 \sin \varphi \sin^2 \theta$, $C = a^2 \sin \theta \cos \theta$,

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2 \sin \theta.$$

Atunci $\vec{n}$ are coordonatele $(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$. Rezultă:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\pi} a^4 (\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin^4 \theta + \sin^2 \varphi \sin^3 \theta \cos \theta + \cos \varphi \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\varphi = \frac{\pi a^4}{16}.$$

[8] Să se afle coordonatele centrului de greutate a emisferei superioare $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$.

Rezolvare. Ecuația emisferei superioare S este

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Observăm că $d\sigma = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$, iar $S = \iint_S d\sigma = 2\pi R^2$

$$S_x = \iint_S x d\sigma = R \iint_D \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_0^R \rho^2 (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$S_y = \iint_S y d\sigma = R \iint_D \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_0^R \rho^2 (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} S_z &= \iint_S z d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= R \iint_D dx dy = R \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^3. \end{aligned}$$

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$x_G = \frac{S_x}{S} = 0; \quad y_G = \frac{S_y}{S} = 0; \quad z_G = \frac{S_z}{S} = \frac{R}{2}.$$

[9] Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{F}$ prin fața exterioară a suprafeței semisferei S unde, $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ și

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}, \quad R > 0.$$

Rezolvare. Avem: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$,

$$\text{și } \vec{n} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi_s(F) &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S \left(x \cdot \frac{x}{R} + y \cdot \frac{y}{R} + z \cdot \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{R} \iint_S (x^2 + y^2 + R^2 - x^2 - y^2) d\sigma = R \iint_S d\sigma = R \cdot 2\pi R^2 = 2\pi R^3. \end{aligned}$$

10 Să se calculeze aria suprafeței $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 2x$.

Rezolvare.

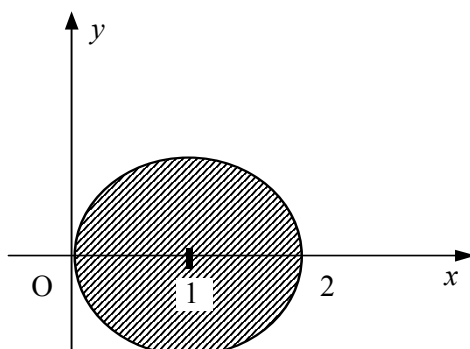


Fig. 8.1

Aria suprafeței considerate va fi $S = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$,

unde $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ și este proiecția lui S în planul xOy .

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta d\theta = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

11 Să se calculeze aria suprafeței sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situată în exteriorul cilindrului $x^2 + y^2 = \pm ax$ (Viviani).

Rezolvare. Cei doi cilindri decupează în sferă patru ferestre de arii egale. Vom calcula aria situată în interiorul celor patru ferestre și o vom scădea din aria sferei: aria unei ferestre este:

$$\begin{aligned} A_f &= \iint_S d\sigma = \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Trecând la coordonatele polare, integrala devine:

$$A_f = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(a - a\sin\theta) d\theta = \pi a^2 - 2a^2.$$

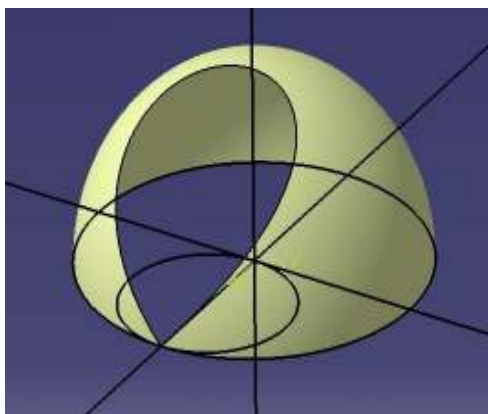


Fig. 8.2

Aria din suprafața sferei aflată în interiorul cilindrului este prin urmare $4\pi a^2 - 8a^2$.

Aria totală a sferei este $S = 4\pi a^2$. Deci, aria suprafeței din sferă aflată în afara ferestrelor Viviani va fi $A = 4\pi a^2 - (4\pi a^2 - 8a^2) = 8a^2$.

[12] Calculați aria porțiunii din planul $6x + 3y + 2z = 12$ conținută în primul octant.

Rezolvare. Aria suprafeței ABC va fi

$$A = \iint_{ABC} d\sigma = \iint_{OAB} \sqrt{1 + (-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} dx dy = \iint_{OAB} \sqrt{\frac{49}{4}} dx dy = \frac{7}{2} \iint_{OAB} dx dy = 14.$$

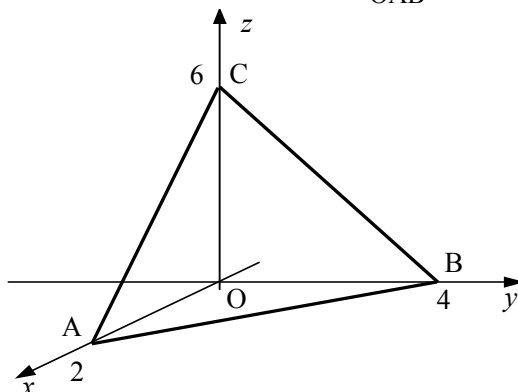


Fig. 8.3

[13] Să se calculeze aria suprafeței $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ situată în interiorul cilindrului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Rezolvare. Suprafața decupată din paraboloidul $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ de cilindrul

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2$ se proiectează în planul xOy în elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2$. Atunci, deoarece

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}$ $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}$, aria se calculează cu relația:

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_{\text{pr } xOy} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Trecând în planul xOy la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = ac\rho \cos \theta; \\ y = ac\rho \sin \theta. \end{cases}$

Jacobianul transformării va fi egal cu $abc^2\rho$ și deci integrala va deveni

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + c^2 \rho^2} abc^2 \rho d\theta d\rho = \frac{2\pi ab}{3} \left[\left(\sqrt{1 + c^2} \right)^3 - 1 \right].$$

14 Să se calculeze $\iint_S (x + y + z) d\sigma$ dacă S este suprafața

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ cu } z \geq 0.$$

Rezolvare. Considerăm parametrizarea suprafeței S dată de

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Atunci:

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \varphi & a \sin \theta \cos \varphi \\ -a \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -a \sin \theta & 0 \\ a \cos \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \sin \varphi & a \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\text{și } \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{a^4 \sin^4 \theta + a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = a^2 \sin \theta.$$

În aceste condiții:

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z) d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta \cos \varphi + a \sin \theta \sin \varphi + a \cos \theta) \cdot a^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\ &= 2a^3 \pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = a^3 \pi. \end{aligned}$$

15 Să se calculeze integrala $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$,

dacă S este fața exterioară a conului $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$).

Rezolvare. Deoarece suprafața S este exprimată explicit prin relația

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ deducem imediat că } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ și deci normala}$$

la suprafață va fi dată de formula:

$$\bar{n}_e = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{j} - \bar{k} \right)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy = \\ &= \iint_{\text{Pr}(S; xOy)} \left[\left(y - \sqrt{x^2+y^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\sqrt{x^2+y^2} - x \right) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x + y \right] dxdy = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2y-2x)dxdy. \end{aligned}$$

Trecând la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho \cos \theta; \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \rho \in (0,1]; \quad \theta \in [0,2\pi),$

integrala devine $\int_0^{2\pi} \int_0^1 2\rho(\sin \theta - \cos \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta - \cos \theta) d\theta = 0.$

16 Să se calculeze integrala $\iint_S \frac{1}{x} dxdz + \frac{1}{y} dzdx + \frac{1}{z} dxdy,$

dacă S este fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$

Rezolvare. Pentru suprafața S considerăm parametrizarea

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi, \\ y = b \sin \theta \sin \varphi, \\ z = c \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{matrix} \theta \in [0, \pi]; \\ \varphi \in [0, 2\pi]. \end{matrix} \quad \text{Atunci}$$

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} b \cos \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi \\ -c \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = bc \sin^2 \theta \cos \varphi$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -c \sin \theta & 0 \\ a \cos \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix} = ac \sin^2 \theta \sin \varphi$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi \\ b \cos \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = ab \sin \theta \cos \theta \quad \text{și}$$

avem: $\iint_S \frac{1}{x} dydz + \frac{1}{y} dzdx + \frac{1}{z} dxdy = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} \right) d\varphi d\theta =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{bc \sin^2 \theta \cos \varphi}{a \sin \theta \cos \varphi} + \frac{ac \sin^2 \theta \sin \varphi}{b \sin \theta \sin \varphi} + \frac{ab \sin \theta \cos \theta}{c \cos \theta} \right) d\varphi d\theta = \\
&= \frac{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}{abc} \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi \right) d\theta = 4\pi \frac{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}{abc}.
\end{aligned}$$

17 Să se calculeze masa pânzei parabolice $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) a cărei densitate variază după legea $\rho = z$.

Rezolvare. Masa pânzei parabolice se calculează după formula

$$M = \iint_S \rho d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx dy.$$

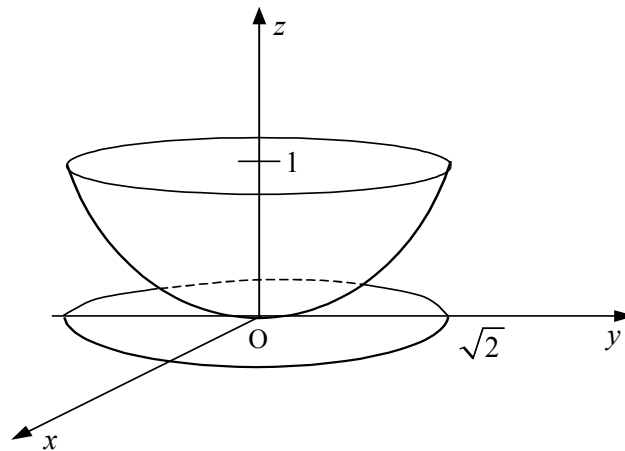


Fig. 8.4

Trecând la coordonate polare în planul xOy , integrala devine:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\theta = \frac{2\pi}{15} [1 + 6\sqrt{3}].$$

18 Să se calculeze suprafața totală a corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ și de paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$ ($a > 0$).

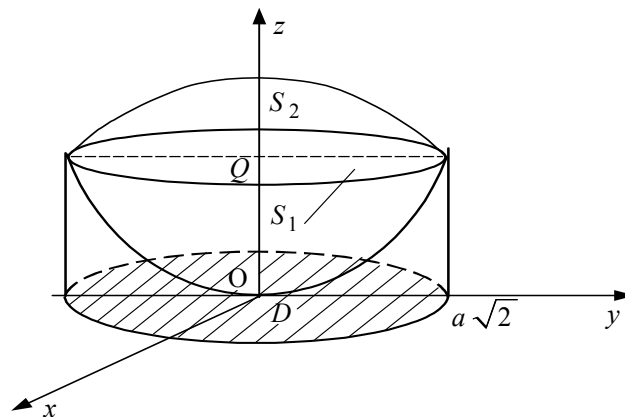


Fig. 8.5

Cele două suprafețe se intersectează după curba $z = a$, $x^2 + y^2 = 2a^2$

$$\begin{aligned}
 S = S_1 \cup S_2, \text{ unde } A_1 &= \iint_{S_1} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dx dy = \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + \rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1) \\
 A_2 &= \iint_{S_2} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{3a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{3a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = 2\pi a^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} - 1).
 \end{aligned}$$

Suprafața totală va fi deci $A_1 + A_2 = 4\pi a^2 (1 + \sqrt{3})$.

19 Să se afle aria porțiunii de suprafață, exprimată sub formă explicită, secționată:

(i) de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ ($x, y > 0$) din paraboloidul hiperbolic $z = xy$;

(ii) de cilindrul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$, $c > 0$, din paraboloidul eliptic $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$; $a, b > 0$;

Rezolvare.

(i) Cum suprafața este exprimată sub formă explicită este comod să folosim formule:

$$A_1 = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

unde D este proiecția suprafeței S pe planul xOy .

În acest caz $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ și $A_1 = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$.

Trecând la coordonate polare, găsim:

$$A = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{6} \left[(r + R^2)^{3/2} - 1 \right].$$

(ii) Procedând similar ca la punctul (i), deducem:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \\
 \text{unde: } D_{xy} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$A_2 = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy.$$

Folosind coordonatele polare generalizate obținem:

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{1+r^2} \cdot a \cdot b \cdot r dr \right) d\theta = \frac{2}{3} \pi \cdot a \cdot b \left[(1+c^2)^{3/2} - 1 \right].$$

20 Să se afle aria porțiunii de suprafață, exprimată sub formă implicită, secționată de cilindrul $x^2 + y^2 = Rx$, $R > 0$, din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, (suprafața Viviani);

Rezolvare.

Metoda recomandată în astfel de cazuri este de a obține o reprezentare parametrică a suprafeței pentru care calculăm aria. Vom folosi coordonatele sferice:

$$T \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, & r = R, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, & \varphi \in [0, \pi], \\ z = r \cos \varphi, & \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

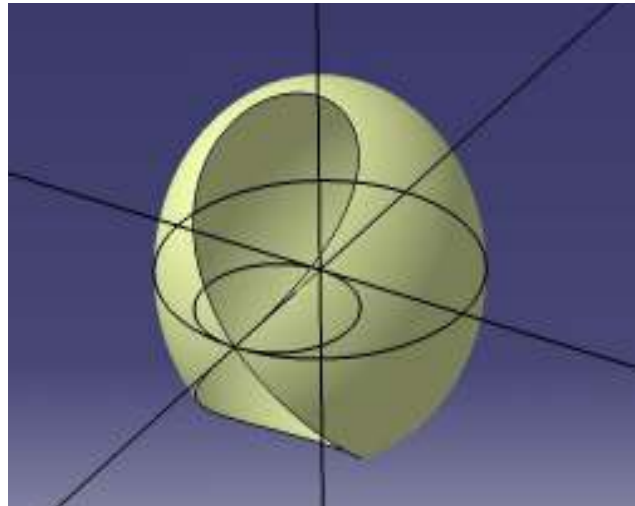


Fig. 8.6

Cu ajutorul matricei derivatelor

$$M = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

se determină coeficienții formeii Gauss ai sferei $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \sin^2 \varphi$ și

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{\varphi\theta}} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \iint_{D_{\varphi\theta}} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta,$$

unde pentru $D_{\varphi\theta}$ vom face următoarele considerații.

Vom studia numai porțiunea din suprafață situată în primul cadran. Pentru punctele de pe curba Viviani curba de intersecție dintre sferă și cilindru) vom avea

$$\sin \varphi = \cos \theta \text{ și cum } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ iar } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi + \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{În consecință: } D_{\varphi\theta} = \left\{ (\varphi, \theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\},$$

$$\text{iar } A = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2 - \theta} \sin \varphi d\varphi \right) d\theta = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Obs. Aria părții de emisferă care rămâne după decuparea suprafeței Viviani este $4R^2$, fapt ce arată că valoarea ei nu se exprimă prin intermediul numerelor iraționale.

[21] (i) Să se determine momentul de inerție al suprafeței paraboloidului conic $x^2 + y^2 = 2az$, $0 < z < a$, în raport cu axa Oz .

(ii) Pentru aceeași suprafață determinați coordonatele centrului de greutate.

Rezolvare.

(i) Cum suprafața este dată printr-o ecuație explicită deduc

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

$$\text{unde } D_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2 \right\}.$$

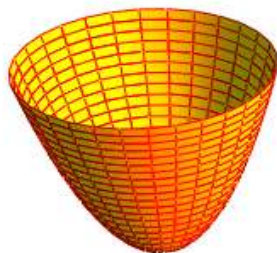


Fig. 8.7

Folosim transformarea în coordonate polare și apoi teorema lui Fubini, deducem:

$$I_z = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2a}} \rho^3 \sqrt{a^2 + \rho^2} d\rho \right) d\theta = \frac{4\pi}{15} (1 + 6\sqrt{3}) a^4.$$

(ii) Datorită simetriei față de axa Oy deducem $x_G = y_G = 0$

$$\begin{aligned} S_z &= \iint_S z dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2a} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2a} \cdot J_z = \frac{2\pi}{15} (1 + 6\sqrt{3}) a^3. \end{aligned}$$

Cum aria suprafeței paraboloidului este $S = \iint_S d\sigma = \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} - 1) a^2$ deducem că

$$z_G = \frac{S_z}{S} = \frac{55 + 9\sqrt{3}}{130} a.$$

3. TEST DE AUTOEVALUARE

1. Să se calculeze integrala de suprafață $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma$, unde

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, a > 0 \right\}.$$

Răspuns. πa^3 .

2. Să se calculeze integrala de suprafață $\iint_S \frac{z \, d\sigma}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}$,

$$\text{unde } S = \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq h \right\}.$$

Răspuns. πh^2 .

3. Să se calculeze $\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \, d\sigma$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{unde } S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Răspuns. $\frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot a^2}{a \cdot b \cdot c}$.

4. Să se calculeze $\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy$,

$$\text{unde } S \text{ este fața exterioară a conului } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq z \leq b.$$

Răspuns. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

5. Să se calculeze $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy$,

$$\text{unde } S \text{ este fața exterioară a cilindrului } x^2 + y^2 = a^2, \quad -h \leq z \leq h, \quad a, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $3\pi a^2 h$.

6. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ prin fața exterioară a suprafeței care delimitează domeniul

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \leq y, a, b, c > 0 \right\}.$$

Răspuns. 0.

7. Să se calculeze $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ dacă S este suprafața exterioară a conului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b, a, b > 0).$$

Răspuns. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}.$

8. Să se calculeze $\iint_S (xy + yz + zx) d\sigma$ dacă S este porțiunea suprafeței conului

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ decupată de suprafața } x^2 + y^2 = 2ax, a > 0.$$

Răspuns. $\frac{64\sqrt{2}}{15} a^4.$

9. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeței omogene $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq a$, $a > 0$.

Răspuns. $x_G = y_G = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$

10. Să se calculeze integrala $\iint_S xyz d\sigma$ dacă S este porțiunea din planul $x + y + z = 1$ aflată în planul octant.

Răspuns. $\frac{\sqrt{3}}{120}.$

11. Să se calculeze integrala $\iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$ dacă S suprafața din primul octant constituită din $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$ și planele de coordonate.

Răspuns. $\frac{\pi}{8}.$

12. Să se calculeze $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$ dacă S este suprafața exterioară a sferei $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, $a, b, c, R > 0$.

Răspuns. $\frac{8\pi}{3} (a + b + c) R^3.$

LECȚIA 13 - FORMULE INTEGRALE

1. Noțiuni teoretice

Formulele integrale sunt formule de legătură între integralele multiple, integralele curbilinii și integralele de suprafață fiind aplicații particulare ale relației $\int_{\partial X} \omega = \int_X \alpha d\omega$, unde

ω este o formă diferențială, $d\omega$ este diferențiala sa exterioară, iar X este un domeniu cu bord regulat, orientabil, orientările lui X și ∂X fiind asociate.

Definiția 9.1.

(i) Fie în spațiul euclidian real $\mathbb{R}^2$ triunghiul T_1 cu vârfurile în punctele $A_0(0,0)$; $A_1(1,0)$; $A_2(0,1)$. Vom spune că triunghiul T_1 este orientat pozitiv dacă se consideră pe mulțimea vârfurilor sale relația de ordine $A_0 < A_1 < A_2$.

(ii) Un triunghi oarecare $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$, $M_3(a_3, b_3)$ este orientat pozitiv dacă și numai dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} > 0$.

(iii) Un domeniu poligonal D a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple și închise este orientat pozitiv dacă orice triunghi format din mulțimea vârfurilor domeniului este orientat pozitiv.

(iv) Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple și închise. Vom spune că D este orientat pozitiv dacă frontiera lui D este orientată pozitiv (orice linie poligonală formată din puncte ale frontierei este pozitiv orientată).

Observația 9.2. Fie D un domeniu compact în spațiul euclidian $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră ∂D este imaginea unei curbe simple și incluse. Fie A un punct arbitrar pe ∂D . Notăm $C(A)$ curba simplă și închisă care are proprietatea că orientează pozitiv domeniul D având ca imagine ∂D .

Fie $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții astfel încât integrala curbilinie $\int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ există. Atunci pentru orice $A \in \partial D$ integrala $\int_{C(A)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ există și nu depinde de A . Vom nota $\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ valoarea comună a acestor integrale.

Propoziția 9.3 (Formula lui Green-Riemann).

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact având ca frontieră o curbă simplă, închisă rectificabilă. Fie $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue pe D care admit derivatele parțiale

$\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe D . În aceste condiții integralele următoare există și are loc relația

$$\oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Observația 9.4.

Fie D un domeniu compact având ca frontieră o curbă simplă închisă și rectificabilă.

Atunci are loc egalitatea: $\text{aria} D = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx$.

Observația 9.5.

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață netedă deschisă definită de $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$ ($u, v \in D$ mărginită de o curbă închisă, netedă $C = \partial S$, funcțiile f, g, h fiind funcție de clasă C^2 pe $D \subset \mathbb{R}^2$).

Vom alege pentru normala suprafeței S acea orientare care determină parcurgerea frontierei ∂S în sens direct și vom numi această față, fața superioară a lui S .

Propoziția 9.6 (Formula lui Stokes).

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață orientată, netedă, deschisă, mărginită de o curbă închisă C , $S = \{(x, y, z) | x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v), (u, v) \in D, f, g, h \in C^2(D)\}$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu care conține suprafața S și $P, Q, R : D \rightarrow \mathbb{R}$ trei funcții continue care admit derivate parțiale de ordinul I continue pe D .

Atunci are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Observația 9.7. Formula lui Green se obține din formula lui Stokes dacă C și S sunt în $\mathbb{R}^2$ (dacă $z = 0$, $dz = 0$).

Propoziție 9.8 (Formula lui Gauss-Ostrogradski).

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit de o suprafață $S = \partial\Omega$ închisă, netedă, orientată după normala exterioară a domeniului Ω . Dacă domeniul Ω este simplu în raport cu toate planele de coordonate și dacă funcțiile $P, Q, R : \Omega \cup S \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue și admit derivate parțiale continue pe Ω , atunci are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} \iint_{S=\partial\Omega} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Observația 9.9. (Interpretări vectoriale)

(i) Fie câmpul vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ de componente (P, Q, R) definit într-un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ prin:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

astfel încât funcțiile $P, Q, R: V \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue și $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața

$S \subset V$, $\vec{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. Atunci fluxul vectorului $\vec{F}$ prin suprafața orientată S va fi

$$\phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

(ii) Dacă $\vec{F}$ este un câmp vectorial de componente P, Q, R de clasă C^1 pe $V \subset \mathbb{R}^3$, atunci se numește rotorul lui $\vec{F}$ vectorul

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Formula lui Stokes devine

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{F} \cdot d\sigma,$$

adică circulația vectorului câmp de-a lungul unei curbe închise este egală cu fluxul rotorului său prin orice suprafața S ce se sprijină pe această curbă închisă.

(iii) Numim divergența câmpului vectorial

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

și notăm $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Cu această definiție formula lui Gauss Ostrogradski devine

$$\iiint_{\Omega} \text{div } \vec{F} dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma,$$

adică integrala triplă a divergenței unui câmp vectorial continuu diferențial pe compactul simplu Ω este egală cu fluxul câmpului prin suprafața frontieră a domeniului, de la interiorul către exteriorul său.

2. Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii, folosind formula lui Green:

$$\boxed{1} \quad I = \int_{\Gamma} (x^3 - 3xy^2) dx + (3x^2y - y^3) dy,$$

unde Γ este frontiera domeniului $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$,

parcursă în sens pozitiv.

Rezolvare. Fie $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $Q(x, y) = 3x^2y - y^3$. Se observă că $P, Q \in C^1(D)$, iar $\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy$.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 12 \iint_D xy dxdy =$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{3R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{3R^4}{2} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R^4}{2}.$$

$$\boxed{2} \quad I = \int_{\Gamma} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy,$$

unde Γ este frontiera domeniului $D = \left\{ (x, y) \left| \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, a > 0 \right. \right\}$,

parcursă în sens pozitiv.

Rezolvare. Fie $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x, y) = xy + x + y$; $Q(x, y) = xy + x - y$.

$$P, Q \in C^1(D) \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1, \frac{\partial P}{\partial y} = x + 1.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (y - x) dx dy = \int_0^{\frac{a}{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho \sin \theta - \frac{a}{2} - \rho \cos \theta \right) \rho d\theta = \\ &= \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} (-\cos \theta) \Big|_0^{2\pi} - \frac{a}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\frac{a}{2}} - \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = -\frac{a^3 \pi}{8}. \end{aligned}$$

Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze integralele de suprafață de tipul al doilea:

$$\boxed{3} \quad I = \iint_S 4x dy dz - 2y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

unde S este fața exterioară a domeniului $V = \left\{ (x, y, z) \left| x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 3] \right. \right\}$.

Rezolvare. Fie $P, Q, R : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$P(x, y, z) = 4x, \quad Q(x, y, z) = -2y^2, \quad R(x, y, z) = z^2.$$

Observăm că $P, Q, R \in C^1(V)$ și că $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4 - 4y + 2z$.

$$\begin{aligned} \text{Deci: } I &= \iiint_V (4 - 4y + 2z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^3 (4 - 4y + 2z) dz \right) \cdot dx dy = \\ &= \iint_D \left(4z - 4yz + z^2 \right) \Big|_{z=0}^{z=3} dx dy = \iint_D (12 - 12y + 9) dx dy, \end{aligned}$$

$$\text{unde } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

$$\text{Avem: } I = 21 \iint_D dx dy - 12 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \theta d\rho = 21 \cdot 4\pi - 0 = 84\pi.$$

$$\boxed{4} \quad I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

unde S este fața exterioară a cubului $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, $a > 0$.

Rezolvare. Fie $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$

$$\begin{aligned} I &= 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^a dx \int_0^a (2ax + 2ay + a^2) dy = \int_0^a (2a^3 x + a^2 x^2) dx = 3a^4. \end{aligned}$$

$$\boxed{5} \quad I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$$

unde S este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\textbf{Rezolvare.} \quad I = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

unde $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Trecând la coordonate sferice, avem:

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho = 6\pi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{12\pi R^5}{5}.$$

$$\boxed{6} \quad \text{Să se calculeze fluxul câmpului vectorial } F(x, y, z) = (2xz, -yz, x^2 + y^2)$$

prin fața exterioară a suprafeței S din primul octant:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

$$\textbf{Rezolvare.} \quad \text{Fie } V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Fluxul câmpului vectorial F este dat de integrala $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, unde S este

compusă din suprafața sferică a octantului și trei suprafețe plane, iar n este normala exterioară la fiecare suprafață

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_V (2z - z) dx dy dz = \iiint_V z dx dy dz.$$

Trecem la coordonate sferice $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$ cu $\rho \in [0, R]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $J = \rho^2 \sin \theta$. Avem:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)(\sin \theta) d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\pi R^4}{16}. \end{aligned}$$

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze:

$$\boxed{7} \quad I = \int_{\Gamma} x(y^2 + z^2) dx + y(z^2 + x^2) dy + z(x^2 + y^2) dz,$$

unde Γ este curba dată de ecuațiile: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$.

Rezolvare.

$$I = \iint_{S_e} (2yz - 2yz) dydz + (2zx - 2xz) dzdx + (2xy - 2xy) dxdy = 0,$$

S_e este fața exterioară a suprafeței mărginită de curba Γ .

$$\boxed{8} \quad I = \int_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + dz, \text{ unde } \Gamma = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}.$$

Rezolvare. $I = \iint_{S_e} -3x^2 y^2 dxdy$, unde S_e reprezintă o suprafață mărginită de curba

Γ , $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Atunci:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}, B = -\frac{\partial f}{\partial y}, C = 1 \text{ și rezultă:}$$

$$\begin{aligned} I &= -3 \iint_D x^2 \cdot y^2 \cdot C dxdy = -3 \iint_D x^2 y^2 dxdy = -3 \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \\ &= -3 \int_0^R \rho^5 d\rho \left[\frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\frac{3\pi}{4} \int_0^R \rho^5 d\rho = -\frac{\pi R^6}{8}. \end{aligned}$$

$$\boxed{9} \quad I = \int_{\Gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz, \text{ unde conturul poligonal închis}$$

$\Gamma = \overline{ABCA}$ are vârfurile $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Rezolvare. Ecuația planului (ABC) este $x + y + z - 1 = 0$.

Normala la planul (ABC) este $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\text{Atunci } I = 2 \iint_{\Delta ABC} dydz + dzdx + dxdy = 2 \iint_{\Delta OAB} 3dxdy = 3.$$

10 Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

unde $\widehat{AMO}$ este semicercul superior $x^2 + y^2 = ax$ parcurs de la $A(a, 0)$ la $O(0, 0)$.

Rezolvare. Fie $P(x, y) = e^x \sin y - my$; $Q(x, y) = e^x \cos y - m$.

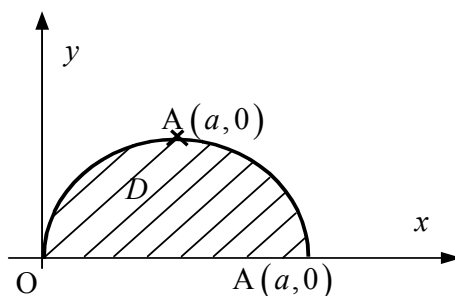


Fig. 9.1

$P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții diferențiabile. Funcțiile $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m$ și, respectiv, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y$ sunt și ele funcții continue.

Considerăm curba determinată de reuniunea dintre arcul $\widehat{AMO}$ și segmentul $\overline{OA}$ și aplicăm formula lui Green pe acest contur închis

$$\int_{\widehat{AMO} \cup \overline{OA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D m dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq ax; y \geq 0\}$. Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\begin{aligned} \iint_D m dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} m \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{2} (a^2 \cos^2 \theta) d\theta = \\ &= \frac{ma^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{ma^2 \pi}{8}. \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} &\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy + \\ &+ \int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{ma^2 \pi}{8}. \end{aligned}$$

O parametrizare pentru OA este $\begin{cases} x=t, \\ y=0, \end{cases} \quad t \in [0, a]$ și

$$\int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \int_0^a 0 dt = 0.$$

Rezultă deci că

$$\int_{\overline{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{ma^2\pi}{8}.$$

[11] Să se calculeze $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy$,

unde C este curba $C: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta; \\ z = 2 + 2\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$

Rezolvare. Curba C este cercul centrat în $(2, 2)$ și de raza 2 deci este o curbă închisă.

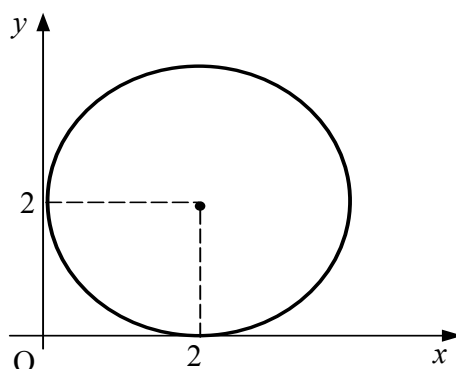


Fig. 9.2

Fie $D = \left\{ (x, y) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \right\}$; $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$; $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 $Q(x, y) = xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Deoarece $(0, 0) \notin D$, P, Q sunt funcții continue și cu derivate parțiale continue. Fiind satisfăcute ipotezele formulei Green rezultă

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy &= \iint_D y^2 dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [2 + \rho \sin \theta]^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 [4\rho + 4\rho^2 \sin \theta + \rho^3 \sin^2 \theta] d\rho d\theta = 20\pi. \end{aligned}$$

[12] Să se calculeze în două moduri integrala

$$\oint_{x^2+y^2=1} e^{x^2+y^2} (-y dx + x dy).$$

Rezolvare. Prin calcul direct, o parametrizare a curbei C este :

$$\begin{cases} x = \cos \theta; \\ y = \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

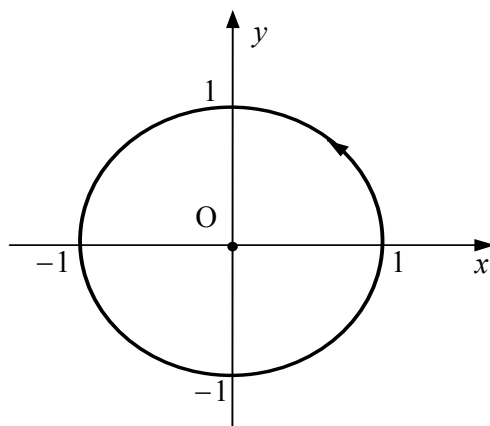


Fig. 9.3

Integrala devine atunci

$$\oint_{x^2+y^2=1} e^{x^2+y^2} (-ydx + xdy) = \int_0^{2\pi} e(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi e.$$

Deoarece curba C este o curbă închisă și funcțiile sunt continue, cu derivate parțiale continue pe $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ se poate aplica formula lui Green:

$$\begin{aligned} \oint_{x^2+y^2=1} e^{x^2+y^2} (-ydx + xdy) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} (2 + 2x^2 + 2y^2) dx dy = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^2} (1 + \rho^2) \rho d\rho d\theta = (e-1)2\pi + 2\pi = 2\pi e. \end{aligned}$$

13 Să se calculeze integrala $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$,

dacă C este elipsa $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ h > 0 \end{matrix}$ parcursă în sens trigonometric dacă privim

din partea pozitivă a axei Ox .

Rezolvare. Elipsa considerată este un contur simplu, închis, ce mărginește suprafața

$$D = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, x^2 + y^2 \leq a^2 \right. \right\}.$$

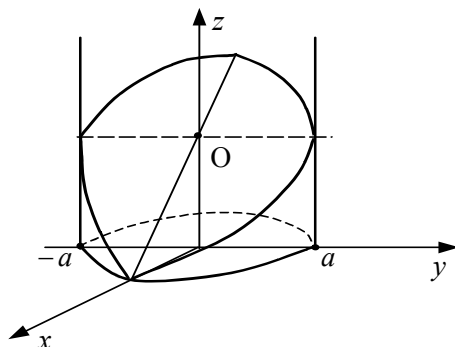


Fig. 9.4

Funcțiile $P(x, y, z) = y - z$; $Q(x, y, z) = z - x$; $R(x, y, z) = x - y$ sunt funcții continue care admit derivate parțiale continue. Atunci aplicând formula lui Stokes, obținem : $\oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz =$

$$= \iint_D -2dydz - 2dzdx - 2dxdy = -2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(+\frac{h}{a} + 0 + 1 \right) dxdy = -2(h+a)\pi a.$$

14 Să se calculeze integrala: $\oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$,

unde C este secțiunea cubului $0 < x < a$, $0 < y < a$, $0 < z < a$ cu planul $x + y + z = \frac{3}{2}a$ parcursă în sens trigonometric, dacă privim din partea pozitivă a axei Ox .

Rezolvare. Curba MNPQRS obținută prin intersecția cubului cu planul este un hexagon regulat de latură $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Funcțiile

$$P(x, y, z) = y^2 - z^2, \quad Q(x, y, z) = z^2 - x^2, \quad R(x, y, z) = x^2 - y^2$$

sunt funcții continue ce admit derivate parțiale continue pe $\mathbb{R}^3$. Aplicând formula lui Stokes, vom obține $\oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$

$$= \iint_{MNPQRS} (-2y - 2z)dydz + (-2z - 2x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy.$$

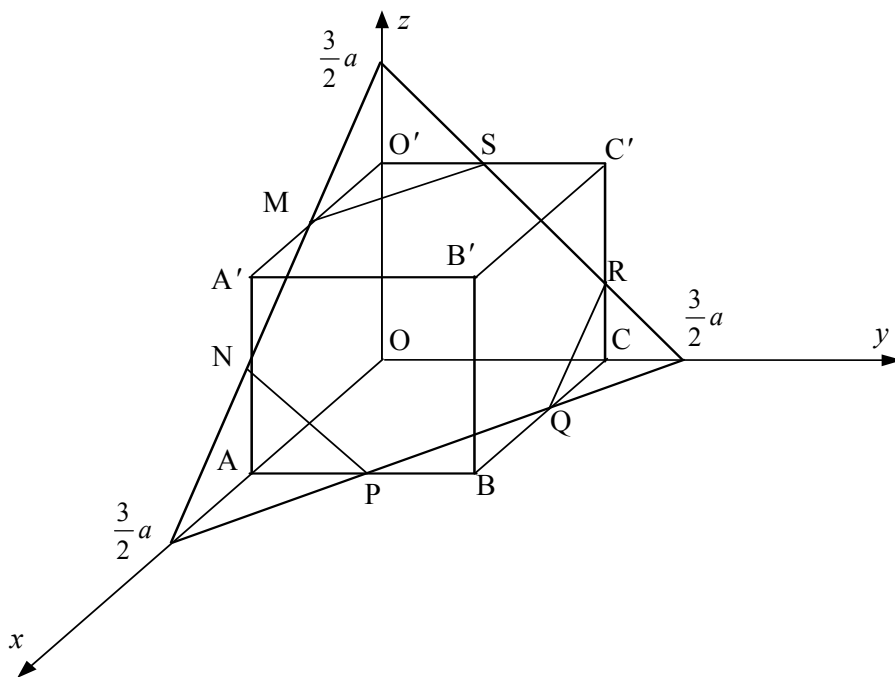


Fig. 9.5

Hexagonul MNPQRS fiind inclus în planul $x + y + z = \frac{3}{2}a$ obținem :

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz = \\ &= -4 \iint_{\text{VAPQCT}} \left(x + y + \frac{3}{2}a - x - y \right) dx dy = -6a \iint_{\text{VAPQCT}} dx dy = -\frac{9}{2}a^3. \end{aligned}$$

15 Să se calculeze integrala $\oint_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$,

dacă C este curba $C: \begin{cases} x = a \sin t, \\ y = a \cos t, \\ z = a(\sin t + \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$

Rezolvare. Curba C este elipsa obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul $z = x + y$ și este o curbă simplă închisă care mărginește domeniul D pe planul $z = x + y$.

Funcțiile $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = x + y$ și $R(x, y, z) = x + y + z$ fiind continue și cu derivate parțiale continue putem aplica formula lui Stokes și vom obține:

$$\begin{aligned} &\oint_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz = \\ &= \iint_D +dydz - dzdx + dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dxdy = -\pi a^2. \end{aligned}$$

16 Să se calculeze $\iint_S y^2 \cdot z dxdy + xz dydz + x^2 y dzdx$,

dacă S este suprafața exterioară a corpului din primul octant limitat de suprafețele $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$ și planele de coordonate.

Rezolvare. Suprafața paraboloidului $z = x^2 + y^2$ și cea a cilindrului se întâlnesc în $z = 1$ și deoarece funcțiile $P(x, y, z)$; $Q(x, y, z)$ și $R(x, y, z)$ sunt continue și cu derivate parțiale continue se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski și vom obține:

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial\Omega=S} y^2 z dxdy + xz dydz + x^2 y dzdx = \iiint_{\Omega} (y^2 + z + x^2) dxdydz = \\ &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x, y > 0}} \left(\int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2 + z) dz \right) dxdy = \\ &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x, y > 0}} \left(x^2 + y^2 \right)^2 + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 dxdy = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

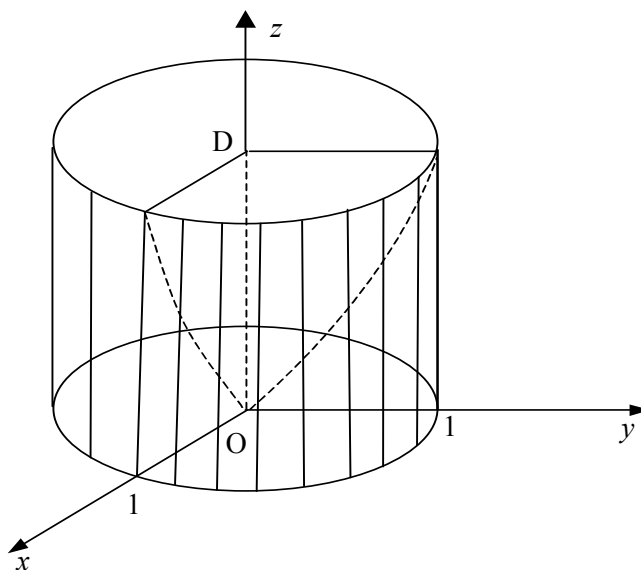


Fig. 9.6

17 Să se calculeze fluxul vectorului de poziție $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafața conului $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$.

Rezolvare. Fluxul vectorului $\vec{a}$ prin suprafața considerată va fi

$$\phi = \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy.$$

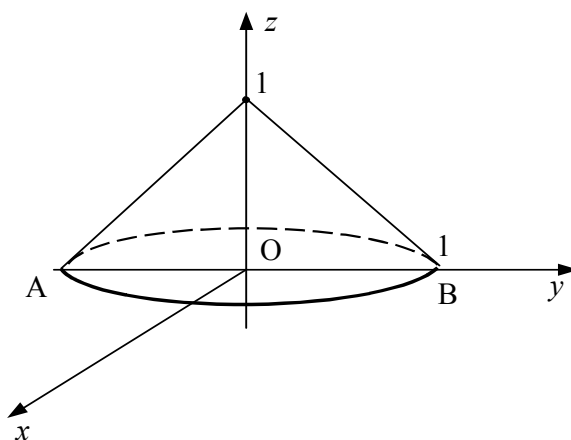


Fig. 9.7

Vom închide suprafața conului cu discul din planul xOy ($x^2 + y^2 \leq 1$) și vom aplica formula lui Gauss-Ostrogradski, deoarece ipotezele acesteia sunt îndeplinite

$$\begin{aligned} & \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy + \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ z=0}} xdydz + ydzdx + zdx dy = \\ & = \iiint_{\Omega} (1+1+1) dx dy dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dar } \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ z=0}} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= 0 \text{ și deci } \phi = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = \\ &= 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-\rho) \rho d\rho d\theta = \pi. \end{aligned}$$

18 Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ prin octantul pozitiv al sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

Rezolvare. Deoarece suprafața considerată este deschisă, o vom închide adăugând planele de coordonate $x = 0, y = 0, z = 0$. Fluxul vectorului $\vec{a}$ prin suprafața considerată va fi:

$$\phi = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} &\iint_{\substack{z=0 \\ x^2+y^2 \leq 1, x, y > 0}} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \\ &= \iint_{\substack{x=0 \\ x^2+y^2 \leq 1, y, z > 0}} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \\ &= \iint_{\substack{y=0 \\ x^2+y^2 \leq 1, x, z > 0}} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = 0. \end{aligned}$$

Deoarece $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$ și $R(x, y, z) = z^2$ sunt funcții de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$, suntem în condițiile formulei Gauss-Ostrogradski și

$$\phi = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dx dy dz,$$

unde $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$.

$$\text{Trecând la coordonate sferice } \Omega: \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, & \rho \in [0, 1]; \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, & \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ z = \rho \cos \theta, & \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \end{cases} \text{ Jacobianul}$$

transformării este $J = \rho^2 \sin \theta$. Obținem:

$$\begin{aligned}
\phi &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\rho \sin \theta \cos \varphi + \rho \sin \theta \sin \varphi + \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \theta) d\varphi d\theta = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

19 Să se calculeze integrala $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$,

dacă S este suprafața exterioară a conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $z \in [0, b]$, $a, b > 0$.

Rezolvare. Deoarece suprafața S este o suprafață deschisă, o vom închide considerând discul $D = \{(x, y, z) \mid z = b, x^2 + y^2 \leq a^2\}$

$$\iint_D x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} b^2 dxdy = \pi a^2 b^2.$$

Deoarece funcțiile $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$ și $R(x, y, z) = z^2$ sunt funcții de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$ și suprafața $S \cup D$ este o suprafață închisă, putem aplica formula Gauss-Ostrogradski și vom obține:

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy + \pi a^2 b^2 &= \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dxdydz = \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(\int_{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^b (x + y + z) dz \right) dxdy = \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x + y)b \left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \right) + \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2} \right) dxdy = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a b \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{a} \right) (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{b^2 \rho}{2} - \frac{b^2 \rho^3}{2a^2} d\rho d\theta = \frac{\pi b^2 a^2}{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Deci, } \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = -\frac{\pi a^2 b^2}{2}.$$

3. Test de autoevaluare

Folosind formula lui Green, să se calculeze:

$$1. \int_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

unde Γ este cercul $x^2 + y^2 = R^2$ parcurs în sens pozitiv.

$$\text{Răspuns. } \frac{\pi R^4}{2}.$$

$$2. I = \int_{\Gamma} xy dx + (x^2 - y^2) dy,$$

unde Γ este conturul $\triangle OAB$ de vârfuri $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,2)$ parcurs în sens pozitiv.

$$\text{Răspuns. } \frac{3}{2}.$$

$$3. I = \int_{\Gamma} (3x^2 - 8y^2) dx + (4x - 6xy) dy,$$

unde Γ este frontiera domeniului

$$D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\text{Răspuns. } \frac{5}{3}.$$

Să se calculeze integralele de suprafață, utilizând formula Gauss-Ostrogradski:

$$4. \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

unde S este față exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$, delimitat de planele $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$$\text{Răspuns. } \frac{a^3}{2}.$$

$$5. I = \iint_S x(y^2 - z^2) dy dz + y(z^2 - x^2) dz dx + z(x^2 - y^2) dx dy,$$

unde S este față exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\text{Răspuns. } 0.$$

$$6. I = \iint_S x dy dz + y dz dx - 2z dx dy,$$

unde S este față exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$ mărginit de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

$$\text{Răspuns. } 0.$$

Să se calculeze integralele următoare, aplicând formula lui Stokes:

7. $\int_{\overline{ABCA}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, unde $\overline{ABCA}$ este conturul poligonal determinat de punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$.

Răspuns. $-a^3$.

8. $\int_{\Gamma} (2x - z) dx + (y - z + 1) dy + z^2 dz$,
unde Γ mărginește suprafața

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2], x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Răspuns. 0.

9. Fie câmpul vectorial $F(x, y, z) = (2z - 2y, 2x - 2z, 2y - 2x)$ și elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$. Să se calculeze circulația câmpului F în lungul curbei de intersecție dintre elipsoid și semiplanele de coordonate $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ în sens pozitiv.

Răspuns. 11π .

10. Să se calculeze $\oint_{\partial D} (x - y) dx + dy$, dacă

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}.$$

Răspuns. $\frac{\pi}{2}$.

11. Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz,$$

curba C este obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$.

Răspuns. 4π .

12. Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

dacă C este curba aflată la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \cdot R \cdot x$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = 2 \cdot r \cdot x$, $0 < r < R$, $z > 0$, parcursă în sens trigonometric privind dinspre partea pozitivă a axei Ox .

Răspuns. $2\pi Rr^2$.

4. Temă de control

1. Să se calculeze integrala

$$\iint_S \left(2x + xy^2 \right) dydz + \left(z^2 - \frac{1}{3}y^3 \right) dzdx + xy\sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde S este suprafața exterioară a solidului comun suprafețelor $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$ și

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$$

Răspuns. 16π .

2. Să se calculeze integrala $\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$,

dacă C este curba lui Viviani definită prin intersecția suprafețelor $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și $x^2 + y^2 = a \cdot x$, $a > 0$.

Răspuns. $-\frac{\pi a^3}{4}$.

3. Calculați direct și apoi verificați rezultatul folosind formula Stokes, următoarea integrală curbilinie $\Gamma = \int_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$,

unde Γ este cercul $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = 0. \end{cases}$

Răspuns. $I = -\frac{\pi R^6}{8}$.

4. Determinați cu ajutorul teoremei Gauss-Ostrogradski fluxul câmpului vectorial

$$\vec{v} = x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j} + xyz \vec{k}$$

prin suprafața S ce este bordura domeniului

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}, R > 0,$$

în direcția normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\vec{v}, S) = \frac{R^5}{3}$.

5. Să se calculeze integrala $I = \iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) d\sigma$,

unde S este suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, iar α , β , γ sunt unghiurile formate de normala exterioară cu direcția pozitivă a axelor de coordonate.

Răspuns. $I = \frac{12}{5} \pi R^5$.

6. Calculați folosind formula Gauss-Ostrogradski integrala de suprafață:

$$I = \iint_S xz dx dz + yx dy dx + zy dz dy, \text{ unde } S \text{ este bordura domeniului}$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq h \right\}, \quad R, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $I = R^2 h \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi h}{3} \right)$.

7. Determinați fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j} + z^2 \bar{k}$

prin suprafața S a conului $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \leq 0, 0 \leq z \leq b \right\}$,

în direcția normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\bar{v}, S) = \frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

8. Să se calculeze, folosind formula integrală a lui Stokes, integrala:

$$I = \oint_C y dx + z dy + x dz,$$

unde C este conturul aflat la intersecția planului $x + y + z = 0$ cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, parcurs în sens direct față de axa Ox .

Răspuns. $\pi a^2 \sqrt{3}$.

9. Să se calculeze, folosind formula integrală lui Gauss-Ostrogradski, integrala:

$$I = \iiint_S (x - y + z) dy \wedge dz + (y - z + x) dz \wedge dx + (z - x + y) dx \wedge dy,$$

unde S este suprafața tetraedrului $ABCO$ cu vârfurile $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ și $O(0,0,0)$.

Răspuns. $\frac{1}{2}$.

10. (i) Să se calculeze în două moduri integrala: $I = \int_C -x^2 \cdot y dx + x \cdot y^2 dy$,

unde C este curba închisă dată de ecuația: $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

(ii) Calculați valoarea integralei: $I = \int_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2) dx$,

unde $\widehat{AB}$ este arcul din cercul $x^2 + y^2 = 2 \cdot x$ cu $A(0,0)$ și $B(1,1)$.

Răspuns. (i) $\frac{\pi}{2} a^4$; (ii) 1.

5. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 4

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
2. **Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină**, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Vol III, Editura Tehnică, București, 1967
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
4. **M. Craiu, M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră și analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978, 1979, Editura ALL, 1993, 1994
6. **P. Flondor, O. Stănășilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
7. *Analiză matematică*, vol. II, Ediția a III-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
8. **C. Udrea**, *Integrala Riemann pentru funcții de variabilă vectorială*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2001
9. **M. Roșculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973
10. **M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
11. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2001
12. **O. Stănășilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
13. **I. Sprințu, V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferențial și integral*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2003
14. **D. M. Băținețu-Giurgiu, M. Băținețu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciții și probleme*, Editura Militară, București, 1992

În dorința de ridicare continuă a standardelor desfășurării activităților dumneavoastră, va rugăm să completați acest chestionar și să-l transmiteți îndrumatorului de an.

Disciplina: ANALIZĂ MATEMATICĂ

Unitatea de învățare/modulul: _____

Anul/grupa: _____

Tutore: _____

Partea I. Conținut

1. Care dintre subiectele tratate în această unitate/modul considerați că este cel mai util și eficient? Argumentați răspunsul.

2. Considerați că este necesară reluarea, sub forma de recapitulare, a unor cunoștințe de Analiză matematică din liceu care stau la baza acestei discipline ? Argumentați.

3. Ce subiecte din această unitate de învățare/modul considerați că ar fi trebuit să fie tratate mai extins ?

4. La care aplicații practice ați întâmpinat dificultăți în procesul de învățare? Care credeți că este motivul dificultăților întâlnite?

5. Timpul alocat acestui modul a fost suficient?

6. Dacă ar fi să vă evaluați cunoștințele acumulate din parcurgerea unității de învățare/modulului, care este nota pe care v-o alocăți, pe o scală de la 1-10?. Argumentați.

Partea II. Impresii generale

1. Acest modul a întrunit așteptările dumneavoastră?

În totalitate

În mare măsură

În mică măsură

Nu

2. Aveți sugestii care să conducă la creșterea calității acestei unitati de invatare/modul?

3. Aveți propuneri pentru alte teme în cadrul acestei discipline ? Argumentati.

4. Cunoașteți care sunt disciplinele de studiu din semestrele următoare la care veți utiliza cunostințele dobândite la această disciplină ?

5. Apreciați că disciplinele de Matematică sunt utile și importante la formarea Dvs intelectuală și profesională prin dezvoltarea capacităților de abstractizare, generalizare și sinteză, prin crearea și dezvoltarea unui raționament logic și riguros, a unei argumentări fundamentate ?

Vă mulțumim pentru feedback-ul dumneavoastră!