

TEMĂ DE CONTROL Nr. 1 (L1, L2)

1 Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

2 Să se studieze convergența șirurilor definite prin:

a) $x_n > 0, x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1+x_n}, (\forall) n \geq 0, x_0 = 1;$

b) $x_n + x_{n+1} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^2 < x_n^2, (\forall) n \in \mathbb{N};$

c) $0 < x_n < 2, (2 - x_n) \cdot x_{n+1} > 1, (\forall) n \in \mathbb{N}.$

3 Să se arate că șirul definit prin termenul general $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ este convergent și să i se calculeze limita.

4 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{n+1} + \dots + \sin \frac{\pi}{2n} \right).$

5 Să se calculeze limitele șirurilor următoare din $\mathbb{R}^2$:

a) $\left(\sqrt[n]{\ln n}, \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}};$

b) $\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}, \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$

6 Să se demonstreze convergența șirului cu termenul general:

$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}, \quad n \geq 1$ și să se arate că limita sa aparține intervalului $(-2, -1).$

7 Știind că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}.$

8

Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$, știind

$$\text{că } \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

9

Fie șirul definit prin $\begin{cases} a_1 = \sqrt{\alpha} \\ a_n = \sqrt{\alpha + a_{n-1}}, \alpha > 0, n \geq 2 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_n$ este convergent și să se calculeze $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell - a_n)$.

10

a) Să se studieze convergența șirului $(x_n)_n$ cu $x_0 > 0$ și definit prin

$$x_{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

b) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - a)$.

11

Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n}, \frac{1}{n} \right)$ din $\mathbb{R}^2$.

12

Să se calculeze sumele următoarelor serii de numere complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)} + i \cdot \frac{1}{n(n+1)} \right);$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3^n} + i \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!} \right).$

TEMĂ DE CONTROL Nr.2 (L3, L4)

1 Să se demonstreze că seriile următoare sunt convergente pe mulțimile indicate, iar sumele lor sunt funcții continue pe aceste mulțimi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}, x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, x \in \mathbb{R};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, 0 \leq x < \infty$, unde seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă.

2 Este posibil ca o serie de funcții continue pe o mulțime X să convergă neuniform pe această mulțime către o funcție continuă?

3 Este posibilă derivarea termen cu termen a seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-nx^2} - e^{-(n-1)x^2} \right], x \in [0,1];$

b) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \ln(1+n^4 x^2) - \frac{1}{2(n-1)} \ln(1+(n-1)^4 x^2) \right], x \in [0,1]?$

4 Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x \left[n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2} \right], x \in [0,1]?$$

5 Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ converge neuniform pe $[0,1]$ și totuși

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx.$$

6 Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$

a) Să se determine mulțimea de convergență și să se calculeze suma ei.

b) Să se arate că suma seriei de puteri, S , verifică ecuația diferențială

$$x \cdot S'(x) + S(x) = \frac{1}{1-x^2} \text{ și ecuația funcțională } S\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2) \cdot S(x).$$

7 Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcții:

a) $f(x) = \frac{8-2x}{x^2-8x+15};$

b) $f(x) = \frac{2-x-x^2}{(1-x)(1-x^2)};$

c) $f(x) = \ln(2-3x+x^2);$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$

f) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$

g) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x};$

h) $f(x) = \frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2};$

i) $f(x) = \frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$

8 Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcțiilor de sub integrale, să se demonstreze:

a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12};$

b) $\lim_{\alpha \searrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}.$