

TEMĂ DE CONTROL Nr. 1 (L5, L6)

1 Să se scrie formula lui Taylor pentru:

a) $f(x, y) = -x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y - 4$ în punctul $(-2, 1)$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot x \cdot y - y \cdot z - 4 \cdot x - 3 \cdot y - z + 4$

în punctul $(1, 1, 1)$.

2 Să se determine extremele funcției:

a) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12 \cdot x \cdot y + 2 \cdot z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot (7 - x - 2 \cdot y - 3 \cdot z), x \cdot y \cdot z \neq 0$;

c) $f(x, y, z) = (x + z^2) \cdot e^{x(y^2 + z^2 + 1)}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3 Să se arate că dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y + z) \cdot \sin z - y \cdot (x + z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația:

$$z \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4 Fie funcțiile

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2, g(x, y, z) = 2 \cdot x + y - 2 \cdot z$$

și

$$h(x, y, z) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x \cdot z - 18 \cdot z \cdot y$$

definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se arate că:

funcțiile f, g și h nu sunt independente în origine;

există o vecinătate a punctului $M_0(-1, 0, 1)$ pe care f depinde de g

și h .

5 Presupunând pe u și v ca noi variabile independente și pe w ca o nouă funcție, să se transforme în noile variabile următoarele ecuații:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) \cdot z, \text{ dacă } \begin{cases} u = x^2 + y^2; \\ v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \\ w = \ln z - (x + y); \end{cases}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \text{ dacă } \begin{cases} u = x; \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}; \\ w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}; \end{cases}$$

$$(x \cdot y + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y \cdot z, \text{ dacă } \begin{cases} u = y \cdot z - x; \\ v = x \cdot z - y; \\ w = x \cdot y - z; \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}, \text{ dacă } \begin{cases} u = \frac{x}{y}; \\ v = x; \\ w = x \cdot z - y; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ dacă } \begin{cases} u = x + y; \\ v = x - y; \\ w = x \cdot y - z. \end{cases}$$

6 Ce devine expresia $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ în coordonate sferice

$x = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta, y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, z = r \cdot \cos \varphi$?