

TEMĂ DE CONTROL Nr. 1 (L7, L8)

1 Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$ și

$$g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția f și să se precizeze mulțimea pe care are loc dezvoltarea.

b) Să se studieze natura integralei $I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ și apoi să se calculeze valoarea sa.

c) Utilizând rezultatele obținute, să se deducă sumele seriilor numerice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2 Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt. \text{ Să se determine mulțimea de convergență a seriei obținute și să se arate}$$

$$\text{că } g(1) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)} \right).$$

3 **a)** Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{pentru } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, existența derivatelor parțiale și diferențiabilitatea funcției f în $(0, 0)$.

b) Să se calculeze $I_n = \int_0^{\pi/2} \left[f\left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}\right) \right]^n dt$, pentru $n = 2k$,

$$n = 2k + 1.$$

c) Să se arate că șirul de funcții $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$g_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot f(x^2, n) \text{ este uniform convergent pe } \mathbb{R} \text{ către o funcție continuă } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

și să se calculeze $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$.

4 Se consideră funcția $F : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, cu proprietatea că există $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot F(u, v) + \beta \cdot F(v, u) = k, (\forall) u, v \in [-1, 1]$.

a) Să se calculeze $I = \int_0^{\pi/2} F(\sin x, \cos x) dx$.

b) Să se determine $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^*$ pentru cazul particular $F(u, v) = \frac{u^2 + 2uv + 2}{5 + 4uv}$,

unde $u, v : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], u(x) = \sin x, v(x) = \cos x$.

Utilizând rezultatele obținute anterior, să se calculeze valoarea integralei $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 2}{5 + 2 \sin 2x} dx$.

5 (i) Să se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$.

(ii) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât integrala $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + \lambda}$ să fie

convergentă;

(iii) Fie $I_{k,n} = \int_0^1 x^k \cdot \ln^n x dx$, unde $k, n \in \mathbb{N}, (I_{0,0} = 1)$.

a) Să se arate că $I_{k,n} = -\frac{n}{k+1} \cdot I_{k,n-1}, n \geq 1$.

b) Să se arate, folosind integrarea termen cu termen a seriilor de funcții că

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k^k}.$$

6 **a)** Să se găsească mulțimea din $\mathbb{R}$ pe care converge seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ și

să se cerceteze convergența uniformă pe $[0, 1]$.

b) Să se calculeze $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ pentru x în mulțimea de

convergență.

c) Folosind $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)^2}$.

d) Să se demonstreze convergența și să se calculeze integrala

$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x) dx$ folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\ln(1+x)$ în jurul lui zero.

7 Fie integralele $y(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)} dx$ și $z(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{(1+x^2)} dx$, unde

$t \in [0, +\infty)$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul t .

8 Să se calculeze integrala $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)} dx$.

9 Din calculul integralei $F(t) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$, să se obțină valoarea

integralei $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(\pi x) dx$.

10 Știind că $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-|a|}$, să se calculeze

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin(ax)}{(1+x^2)^2} dx.$$

11 Să se găsească o relație între integralele $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$ și

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}},$$

stabilind mai întâi condiția pe care trebuie să o îndeplinească $n \in \mathbb{R}$, astfel

ca I_1 și I_2 să fie convergente.

12 Să se calculeze $I = \int_0^1 \ln(\Gamma(x)) dx$, unde $\Gamma(x)$ este funcția lui Euler.