

TEMĂ DE CONTROL Nr. 1 (L9)

1. Să se calculeze $\int_C x dy$ dacă

$$C = \begin{cases} x = e^t; \\ y = \ln(1 + e^t), \end{cases} \quad t \in [0, \ln 2].$$

Răspuns. $1 + \ln \frac{2}{3}$.

2. Să se calculeze integrala $\int_C (\arcsin y) dx + x^3 dy$ dacă

$$C: \begin{cases} x = -t; \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

Răspuns. $\frac{3\pi}{8} - 2$.

3. Să se calculeze integrala

$$\int_C x dx + xy dy + xyz dz, \quad \text{dacă } C: \begin{cases} x = e^t; \\ y = e^{-t}; \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Răspuns. $\frac{e^2}{2} + \frac{2-e}{2e}$.

4. Să se calculeze integrala

$$\int_C z \sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz, \quad \text{dacă } C = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$
$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a, b > 0.$$

Răspuns. $\frac{a^2 b}{2} (\pi - 1)$.

5. Să se calculeze integrala

$$\int_C \sqrt{y^2 + z^2} dx + \sqrt{z^2 + x^2} dy + \sqrt{x^2 + y^2} dz,$$

unde C este curba simplă care are drept imagine segmentul din spațiu AB cu $A(-1, -1, -1)$ și $B(2, 2, 2)$ și capătul în punctul A .

Răspuns. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

6. Să se calculeze integrala

$$\int_C y dx + z dy + x dz,$$

unde C este curba simplă închisă care are drept imagine triunghiul din spațiu $A_1A_2A_3A_1$ cu vârfurile $A_1(1, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0)$; $A_3(0, 0, 1)$.

Răspuns. $-\frac{3}{2}$.

7. Să se calculeze integrala

$$\int_{\left(\frac{1}{3}, -2\right)}^{(3, 0)} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy$$

pe o curbă a cărei imagine nu intersectează hiperbola $xy = -1$.

Răspuns. $\ln 3$.

8. Stabilind că expresia $\omega(x, y, z) = (y^2 - 3x^2)dx + 2xydy$ este o diferențială totală să se găsească o funcție $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $dF = \omega$.

Răspuns. $F(x, y) = -x^3 + xy^2 + C$.

9. Stabilind în prealabil că expresia

$$\omega = \left(\frac{z+xy}{xz} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + x \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2+y^2} \right) dy + \frac{z-xy}{z^2} dz, \quad x > 0, \quad z > 0$$

este o diferențială totală să se găsească o funcție $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $dF = \omega$.

Răspuns. $F(x, y, z) = \ln xz - \arctg \frac{y}{z} + \frac{xy}{z} + C$.

TEMĂ DE CONTROL Nr.2 (L10, L11, L12, L13)

1. Să se calculeze integrala

$$\iint_S \left(2x + xy^2 \right) dydz + \left(z^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) dzdx + xy\sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde S este suprafața exterioară a solidului comun suprafețelor $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$ și

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$$

Răspuns. 16π .

2. Să se calculeze integrala $\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$,

dacă C este curba lui Viviani definită prin intersecția suprafețelor $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și $x^2 + y^2 = a \cdot x$, $a > 0$.

Răspuns. $-\frac{\pi a^3}{4}$.

3. Calculați direct și apoi verificați rezultatul folosind formula Stokes, următoarea integrală curbilinie $\Gamma = \int_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$,

unde Γ este cercul $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = 0. \end{cases}$

Răspuns. $I = -\frac{\pi R^6}{8}$.

4. Determinați cu ajutorul teoremei Gauss-Ostrogradski fluxul câmpului vectorial

$$\vec{v} = x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j} + xyz \vec{k}$$

prin suprafața S ce este bordura domeniului

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}, R > 0,$$

în direcția normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\vec{v}, S) = \frac{R^5}{3}$.

5. Să se calculeze integrala $I = \iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) d\sigma$,

unde S este suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, iar α, β, γ sunt unghiurile formate de normala exterioară cu direcția pozitivă a axelor de coordonate.

Răspuns. $I = \frac{12}{5} \pi R^5$.

6. Calculați folosind formula Gauss-Ostrogradski integrala de suprafață:

$$I = \iint_S xz dx dz + yx dy dx + zy dz dy, \text{ unde } S \text{ este bordura domeniului}$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq h \right\}, \quad R, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $I = R^2 h \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi h}{3} \right)$.

7. Determinați fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j} + z^2 \bar{k}$

prin suprafața S a conului $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \leq 0, 0 \leq z \leq b \right\}$,

în direcția normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\bar{v}, S) = \frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

8. Să se calculeze, folosind formula integrală a lui Stokes, integrala:

$$I = \oint_C y dx + z dy + x dz,$$

unde C este conturul aflat la intersecția planului $x + y + z = 0$ cu sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad a > 0, \text{ parcurs în sens direct față de axa } Ox.$$

Răspuns. $\pi a^2 \sqrt{3}$.

9. Să se calculeze, folosind formula integrală lui Gauss-Ostrogradski, integrala:

$$I = \iiint_S (x - y + z) dy \wedge dz + (y - z + x) dz \wedge dx + (z - x + y) dx \wedge dy,$$

unde S este suprafața tetraedrului ABCO cu vârfurile $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ și $O(0,0,0)$.

Răspuns. $\frac{1}{2}$.

10. (i) Să se calculeze în două moduri integrala: $I = \int_C -x^2 \cdot y dx + x \cdot y^2 dy$,

unde C este curba închisă dată de ecuația: $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

(ii) Calculați valoarea integralei: $I = \int_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2) dx$,

unde $\widehat{AB}$ este arcul din cercul $x^2 + y^2 = 2 \cdot x$ cu $A(0,0)$ și $B(1,1)$.

Răspuns. (i) $\frac{\pi}{2} a^4$; (ii) 1.