

TEST DE AUTOEVALUARE L1

1 Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze divergența șirurilor:

a) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$;

b) $u_n = \sin n$; c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2 Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, cu $x_0 > 0$;

b) $x_{n+1} = x_n^2 - 2 \cdot x_n + 2$, $n \geq 1$, $x_1 \in [1, 2]$;

c) $x_{n+1}^2 = 3 \cdot x_n - 2$, $n \geq 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$;

d) $x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 = 3$.

3 Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

este convergent și să se calculeze limita sa.

4 Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este convergent

și să se deducă inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

5 Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (2n)}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2) \dots (a+n)}{n!}}$, $a > -1$.

TEST DE AUTOEVALUARE L2

1 Să se stabilească natura seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(2 + e^{3n})}{\ln(3 + e^{2n})};$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n};$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right);$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}, \alpha \in \mathbb{R}.$

2 Să se demonstreze că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă, pentru orice

x real. Dacă $s(x)$ este suma seriei, să se stabilească relația

$$s(x+y) = s(x) \cdot s(y), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

TEST DE AUTOEVALUARE L3

1 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin

$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \cdot \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$, este convergent pe $\mathbb{R}$, iar limita sa este o funcție continuă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$.

2 Să se arate că șirul de funcții $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}$

converge, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

3 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin

$f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)}$, $x \in [0, 1]$ converge neuniform pe $[0, 1]$, dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

4 Să se determine mulțimea de convergență și uniform convergență a seriei

$x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right]$, $0 \leq x \leq 1$. Să se determine suma seriei.

5 Utilizând criteriul lui Weierstrass, să se studieze convergența seriilor de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^3}{1+n^3 \cdot x^4}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \cdot \frac{\cos nx}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \sin \frac{1}{3^n \cdot x^2}$, $x \neq 0$, $|a| < 3$.

TEST DE AUTOEVALUARE L4

1] Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2n-1) \cdot x^{2n-2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) \cdot x^n$;

d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \cdot x^n$, $a \in \mathbb{R}$.

2] Fie un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$. Să se calculeze suma seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3] Să se arate că funcțiile:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, se pot dezvolta în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ și să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

4] Să se arate că funcțiile următoare se pot dezvolta în serie de puteri și să se găsească dezvoltarea, precizându-se intervalul în care aceasta este adevărată:

a) $f(x) = (1+x)^a$, $x > -1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$;

b) $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.

5] Să se demonstreze inegalitatea $e^x > \frac{(n+1)^n}{n!}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

6] Să se calculeze, utilizând formula lui Taylor, limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$