

TEST DE AUTOEVALUARE L5

1 Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

b) $f(x, y, z) = \varphi(x \cdot y, x^2 + y^2 - z^2)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

2 Să se calculeze df și d^2f , dacă:

$f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, unde φ este de clasă C^2 ;

$f(x, y) = \varphi(x + y, x - y)$, unde φ este de clasă C^2 ;

$f(x, y, z) = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, unde φ este de clasă C^2 .

3 Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x, y) = e^{x+y}$ în punctul $(1, -1)$.

4 Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$,

$(x, y, z) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$;

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

d) $f(x, y, z) = a \cdot x^2 - b \cdot x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

TEST DE AUTOEVALUARE L6

1 Să se determine extremele funcției $z = f(x, y)$, definită implicit prin:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot z - y \cdot z + 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 2 = 0$.

2 Să se arate că funcțiile:

$$y_1 = x + y + z, y_2 = x^3 + y^3 + z^3 + 6 \cdot x \cdot y \cdot z$$

și

$$y_3 = x \cdot y(x + y) + y \cdot z(y + z) + z \cdot x(z + x)$$

sunt dependente funcțional pe $\mathbb{R}^3$. Care este relația de dependență?

3 Să se determine extremele funcției $f(x, y)$ cu legăturile indicate:

a) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$;

c) $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2, x^2 - y^2 = 1$;

d) $f(x, y) = x \cdot y, x + y = 1$;

e) $f(x, y) = x + 2 \cdot y, x^2 + y^2 = 5$.

4 Să se determine valoarea maximă și valoarea minimă pentru:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + 1, x^2 + y^2 \leq 1$;

b) $f(x, y) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$.

5 Să se transforme în coordonate polare, făcând înlocuirile: $x = r \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \theta$, următoarele expresii:

a) $E = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$;

b) $E = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$;

c) $E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

d) $E = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot x \cdot y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.