

TEST DE AUTOEVALUARE L7

1 Să se arate că:

$$\textbf{i)} \quad I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} \textbf{ii)} \quad I_{2n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{n+3/2}} = \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)}; \end{aligned}$$

$$\textbf{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1} = 0;$$

$$\textbf{iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ (formula lui Wallis).}$$

Indicație de rezolvare:

$$\textbf{i)} \quad I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx;$$

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \cdot \sin x \, dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \cdot (\cos x)' \, dx = \dots \text{etc.}$$

În final se obține $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \dots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot I_0$ și cum $I_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă că

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

ii) se demonstrează similar cu punctul i);

iii) deoarece $0 < I_{2n+1} < I_{2n} < \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}$, rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1} = 0$$

iv) din inegalitățile $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ rezultă

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

iar prin trecere la limită obținem formula lui Wallis.

2 Să se determine aria regiunii plane care se află în primul cadran, este mărginită de axa ox și:

a) axa oy și curba de ecuație $y(x^2 + 4) = 8$;

b) dreapta $x = 3$ și curba de ecuație $yx^2 = 1 + 4y$.

Indicație de rezolvare:

a) $A = \int_0^{\infty} |f(x)| dx = \dots\dots\dots = 2\pi$;

b) $A = \frac{1}{4} \cdot \ln 5$.

3 Să se calculeze $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1}$, $\alpha \neq k\pi$ și apoi să se deducă valorile

integralelor:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$; ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$; iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Indicație de rezolvare: se descompune fracția de sub integrală în fracții simple:

$$\frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}. \text{ Se obține:}$$

$$\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} dx = \frac{1}{4 \cos \alpha} \cdot \left[\int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} - \int \frac{x dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} \right].$$

Dar $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = (x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$ și cu schimbarea de variabilă

$x = \cos \alpha + t \sin \alpha$ și similar pentru $x^2 + 2x \cos \alpha + 1 = (x + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$, obținem:

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \alpha + 1).$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x \cos \alpha + 1).$$

$$\text{Deci, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}.$$

Valorile celor trei integrale se obțin dând valori convenabile parametrului α .

TEST DE AUTOEVALUARE L8

1 Să se calculeze următoarele integrale cu parametri:

a) $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a, b \geq 0;$

b) $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\arctg(\alpha x)}{x(1+x^2)} dx, \quad \alpha > 0;$

c) $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\arctg(\alpha x) \cdot \arctg(\beta x)}{x^2} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$

2 Să se deducă egalitățile:

a) $\int_0^\infty \frac{2t dx}{(x^2 + t^2)^2} = -\frac{\pi}{2t^2}, \quad t > 0;$

b) $\int_0^\infty \frac{\arctg \frac{t}{x} - \arctg \frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln t, \quad t > 0;$

c) $\int_0^\infty \frac{1 - \cos(xt)}{x} \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + t^2).$

3 Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a, b > 0;$

b) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)};$

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx;$

d) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, \quad m, n > 0.$